Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 2007/2008

Dieses Skriptum entstand parallel zur Vorlesung und sollte mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich leider nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Die bei den Kurzbiographien abgedruckten Bilder von Mathematikern stammen aus dem MacTutor History of Mathematics archive der Universität von St Andrews, wo auch weitere Informationen zu finden sind: `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html`

Inhalt

KAPITEL III: HARMONISCHE ANALYSE UND INTEGRALTRANSFORMATIONEN 1

§1: Funktionen einer komplexen Veränderlichen 3
a) Wozu komplexe Zahlen 3
b) Holomorphe Funktionen 6
c) Beispiele holomorpher Funktionen 10
d) Der CAUCHYsche Integralsatz 15
e) Die CAUCHYsche Integralformel und der Logarithmus 21
f) TAYLOR-Entwicklung holomorpher Funktionen 29
g) Meromorphe Funktionen 32
h) LAURENT-Reihen 35
i) Der Fundamentalsatz der Algebra 43
j) Der Residuensatz 46
k) Berechnung der Residuen 48
l) Ein erstes Beispiel 49
m) Anwendung auf reelle Integrale 51
n) Harmonische Funktionen 62

§2: Reelle und komplexe FOURIER-Reihen 65
a) Die schwingende Saite 65
b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite 68
c) Orthogonalitätsrelationen 72
d) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome 78
e) Harmonische Analyse periodischer Funktionen 81

§3: Erste Beispiele von FOURIER-Reihen 82
a) Rechenregeln 82
b) Periodische Rechteckimpulse 85
c) Sägezahnimpulse 87
d) Der Sinus hyperbolicus 89
e) Konvergenz der berechneten Reihen 95
f) Das GIBBS-Phänomen 102
g) Die BESSELsche Ungleichung 107
h) Harmonische Analyse als lineare Abbildung 111

§4: Periodische Faltungen 112
a) Faltungen 112
b) Die FOURIER-Reihe einer Faltung 114
c) Faltung mit einem Sägezahn 117
d) Fourier-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen 118
e) Der Eindeutigkeitssatz 120
f) Der Satz von PARSEVAL 130
g) HILBERT-Räume 134
h) Die POISSON-Formel 138

§5: FOURIER- und LAPLACE-Transformationen 140
a) FOURIER-Reihen und FOURIER-Integrale 141
b) Die LAPLACE-Transformation 144
c) Erste Beispiele 145
d) Erste Rechenregeln 153

§6: Ableitungen und Differentialgleichungen 157
a) Ableitungen unter dem Integralzeichen 157
b) Transformationen und Ableitungen 160
c) Ungedämpfte Schwingungen 164
d) Gedämpfte Schwingungen 165
e) Erzwungene Schwingungen 173

§7: Die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum 181
a) Der SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen 181
b) Die FOURIER-Transformierte der GAUSS-Funktion 185
c) Die Umkehrung der FOURIER-Transformation 189

§8: Die FOURIER-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 194
a) Quadratintegrierbare Funktionen 194
b) Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum 196
c) Die FOURIER-Transformierte einer Distribution 204
d) Der Satz von RIESZ 208
e) Die PLANCHEREL-Formel 216
f) Ableitungen von Distributionen 228
g) Faltungen 232
h) Der Abtastsatz von NYQUIST 238

§9: Ausblick: Mehrdimensionale FOURIER-Theorie 243
a) Faltungen und FOURIER-Integrale 243
b) FRAUNHOFER-Beugung 245

KAPITEL IV: DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 257

§1: Definitionen und erste Beispiele 257
a) Wurfparabel 257
b) Radioaktiver Zerfall 259
c) Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme ... 260
d) Systeme linearer Differentialgleichungen 262
e) Die Matrixexponentialfunktion 267
f) Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion 268

§2: Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren 274
a) Mehr über Eigenwerte und Eigenvektoren 275
b) Ein erstes Beispiel 278
c) Das charakteristische Polynom und seine Nullstellen 281
d) Vielfachheiten von Eigenwerten 289
e) Eigenwerte symmetrischer und HERMITEscher Matrizen 294
f) Hauptvektoren und und die JORDAN-Zerlegung 300
g) Ein Beispiel 312
h) Ergänzung: Die JORDAN-Normalform 315

§3: Lineare Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme 322
a) Systeme homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 322
b) Langzeitverhalten der Lösung 323
c) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten 329
d) Inhomogene Differentialgleichungen 337
e) Symmetriebetrachtungen 341
f) Lineare homogene Differenzengleichungen 351

§4: Nichtlineare Differentialgleichungen 354
a) Eindeutigkeitsfragen 355
b) Der Satz von PICARD und LINDELÖF 358
c) Eindeutigkeitsprobleme für Systeme 368
d) Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen 369
e) Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren ... 377
f) Qualitative Theorie 386
g) Stabilitätsfragen 396

KAPITEL V: OPTIMIERUNG, FEHLERRECHNUNG UND STATISTIK 411

§1: Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher 411
a) Der eindimensionale Fall 411
b) Verallgemeinerung aufs Mehrdimensionale 412

§2: Maxima und Minima unter Nebenbedingungen 416

§3: Numerische Verfahren 429
a) Die Gradientenmethode 430
b) Der METROPOLIS-Algorithmus 435
c) Zusammenfassung 440

§4: Grundzüge der Fehler- und Ausgleichsrechnung 440
a) Das LAPLACESCHE Fehlermodell 441
b) Statistische Kenngrößen 444
c) Das Fehlerfortpflanzungsgesetz 449
d) Die Standardabweichung des Mittelwerts und die Schätzung der Varianz 451

§5: Zufallsvariablen und ihre Verteilungen 452
a) Zufallsvariablen 452
b) Statistische Kenngrößen von Zufallsvariablen 454

§6: Erste Beispiele von Verteilungen 455
a) Die Gleichverteilung 455
b) Die Binomialverteilung 456
c) Die POISSON-Verteilung 461

§7: Die Normalverteilung 464
a) Der zentrale Grenzwertsatz 464
b) Eigenschaften der Normalverteilung 468
c) Die Maximum Likelihood Methode 473

§8: Kompression von Bild- und Audiodaten 475
a) Datenkompression 476
b) Korrelation von Zufallsvariablen 478
c) Das Datenmodell 482
d) Komprimierung durch Dekorrelation 486
e) Die diskrete Kosinus-Transformation 490