

Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 2007/2008

Dieses Skriptum entstand parallel zur Vorlesung und sollte mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehungsweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich leider nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Die bei den Kurzbiographien abgedruckten Bilder von Mathematikern stammen aus dem MacTutor History of Mathematics archive der Universität von St Andrews, wo auch weitere Informationen zu finden sind: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>

| | |
|--|-----|
| §3: Erste Beispiele von FOURIER-Reihen | 82 |
| a) Rechenregeln | 82 |
| b) Periodische Rechteckimpulse | 85 |
| c) Sägezahnimpulse | 87 |
| d) Der Sinus hyperbolicus | 89 |
| e) Konvergenz der berechneten Reihen | 95 |
| f) Das GIBBS-Phänomen | 102 |
| g) Die BESSELsche Ungleichung | 107 |
| h) Harmonische Analyse als lineare Abbildung | 111 |
| §4: Periodische Faltungen | 112 |
| a) Faltungen | 112 |
| b) Die FOURIER-Reihe einer Faltung | 114 |
| c) Faltung mit einem Sägezahn | 117 |
| d) Fourier-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen | 118 |
| e) Der Eindeutigkeitssatz | 120 |
| f) Der Satz von PARSEVAL | 130 |
| g) HILBERT-Räume | 134 |
| h) Die POISSON-Formel | 138 |
| §5: FOURIER- und LAPLACE-Transformationen | 140 |
| a) FOURIER-Reihen und FOURIER-Integrale | 141 |
| b) Die LAPLACE-Transformation | 144 |
| c) Erste Beispiele | 145 |
| d) Erste Rechenregeln | 153 |
| §6: Ableitungen und Differentialgleichungen | 157 |
| a) Ableitungen unter dem Integralzeichen | 157 |
| b) Transformationen und Ableitungen | 160 |
| c) Ungedämpfte Schwingungen | 164 |
| d) Gedämpfte Schwingungen | 165 |
| e) Erzwungene Schwingungen | 173 |

Inhalt

| | |
|--|----|
| KAPITEL III: HARMONISCHE ANALYSE UND INTEGRALTRANSFORMATIONEN | 1 |
| §1: Funktionen einer komplexen Veränderlichen | 3 |
| a) Wozu komplexe Zahlen | 3 |
| b) Holomorphe Funktionen | 6 |
| c) Beispiele holomorpher Funktionen | 10 |
| d) Der CAUCHYSche Integralsatz | 15 |
| e) Die CAUCHYSche Integralformel und der Logarithmus | 21 |
| f) TAYLOR-Entwicklung holomorpher Funktionen | 29 |
| g) Meromorphe Funktionen | 32 |
| h) LAURENT-Reihen | 35 |
| i) Der Fundamentalsatz der Algebra | 43 |
| j) Der Residuensatz | 46 |
| k) Berechnung der Residuen | 48 |
| l) Ein erstes Beispiel | 49 |
| m) Anwendung auf reelle Integrale | 51 |
| n) Harmonische Funktionen | 62 |
| §2: Reelle und komplexe FOURIER-Reihen | 65 |
| a) Die schwingende Saite | 65 |
| b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite | 68 |
| c) Orthogonalitätsrelationen | 72 |
| d) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome | 78 |
| e) Harmonische Analyse periodischer Funktionen | 81 |

| | |
|--|-----|
| §7: Die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum | 181 |
| a) Der SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen | 181 |
| b) Die FOURIER-Transformierte der GAUSS-Funktion | 185 |
| c) Die Umkehrung der FOURIER-Transformation | 189 |
| §8: Die FOURIER-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ | 194 |
| a) Quadratintegrierbare Funktionen | 194 |
| b) Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum | 196 |
| c) Die FOURIER-Transformierte einer Distribution | 204 |
| d) Der Satz von RIESZ | 208 |
| e) Die PLANCHEREL-Formel | 216 |
| f) Ableitungen von Distributionen | 228 |
| g) Faltungen | 232 |
| h) Der Abtastatz von NYQUIST | 238 |
| §9: Ausblick: Mehrdimensionale FOURIER-Theorie | 243 |
| a) Faltungen und FOURIER-Integrale | 243 |
| b) FRAUNHOFER-Beugung | 245 |
| KAPITEL IV: DIFFERENTIALGLEICHUNGEN | 257 |
| §1: Definitionen und erste Beispiele | 257 |
| a) Wurfparabel | 257 |
| b) Radioaktiver Zerfall | 259 |
| c) Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme | 260 |
| d) Systeme linearer Differentialgleichungen | 262 |
| e) Die Matrixexponentialfunktion | 267 |
| f) Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion | 268 |
| §2: Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptvektoren | 274 |
| a) Mehr über Eigenwerte und Eigenvektoren | 275 |
| b) Ein erstes Beispiel | 278 |
| c) Das charakteristische Polynom und seine Nullstellen | 281 |

| | |
|--|-----|
| d) Vielfachheiten von Eigenwerten | 289 |
| e) Eigenwerte symmetrischer und HERMITESCHER Matrizen | 294 |
| f) Hauptvektoren und und die JORDAN-Zerlegung | 300 |
| g) Ein Beispiel | 312 |
| h) Ergänzung: Die JORDAN-Normalform | 315 |
| §3: Lineare Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme | 322 |
| a) Systeme homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten | 322 |
| b) Langzeitverhalten der Lösung | 323 |
| c) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten | 329 |
| d) Inhomogene Differentialgleichungen | 337 |
| e) Symmetriebetrachtungen | 341 |
| f) Lineare homogene Differenzgleichungen | 351 |
| §4: Nichtlineare Differentialgleichungen | 354 |
| a) Eindeutigkeitsfragen | 355 |
| b) Der Satz von PICARD und LINDELÖF | 358 |
| c) Eindeutigkeitsprobleme für Systeme | 368 |
| d) Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen | 369 |
| e) Exakte Differentialgleichungen und integrierende Faktoren | 377 |
| f) Qualitative Theorie | 386 |
| g) Stabilitätsfragen | 396 |
| KAPITEL V: OPTIMIERUNG, FEHLERRECHNUNG UND STATISTIK | 411 |
| §1: Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher | 411 |
| a) Der eindimensionale Fall | 411 |
| b) Verallgemeinerung aufs Mehrdimensionale | 412 |
| §2: Maxima und Minima unter Nebenbedingungen | 416 |

| | |
|--|-----|
| §3: Numerische Verfahren | 429 |
| a) Die Gradientenmethode | 430 |
| b) Der METROPOLIS-Algorithmus | 435 |
| c) Zusammenfassung | 440 |
| §4: Grundzüge der Fehler- und Ausgleichsrechnung | 440 |
| a) Das LAPLACESCHE Fehlermodell | 441 |
| b) Statistische Kenngrößen | 444 |
| c) Das Fehlerfortpflanzungsgesetz | 449 |
| d) Die Standardabweichung des Mittelwerts und die Schätzung der Varianz | 451 |
| §5: Zufallsvariablen und ihre Verteilungen | 452 |
| a) Zufallsvariablen | 452 |
| b) Statistische Kenngrößen von Zufallsvariablen | 454 |
| §6: Erste Beispiele von Verteilungen | 455 |
| a) Die Gleichverteilung | 455 |
| b) Die Binomialverteilung | 456 |
| c) Die POISSON- Verteilung | 461 |
| §7: Die Normalverteilung | 464 |
| a) Der zentrale Grenzwertsatz | 464 |
| b) Eigenschaften der Normalverteilung | 468 |
| c) Die Maximum Likelihood Methode | 473 |
| §8: Kompression von Bild- und Audiodaten | 475 |
| a) Datenkompression | 476 |
| b) Korrelation von Zufallsvariablen | 478 |
| c) Das Datenmodell | 482 |
| d) Komprimierung durch Dekorrelation | 486 |
| e) Die diskrete Kosinus-Transformation | 490 |