WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

26. November 2007

13. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*

1) *Richtig oder falsch:* Verdoppelt man alle Werte einer Meßreihe, verdoppelt sich dadurch auch die Standardabweichung.

Lösung: *Richtig:* Da sich auch der Mittelwert verdoppelt, vervierfacht sich die Varianz; die Standardabweichung als deren Quadratwurzel verdoppelt sich also.

2) Nach dem Brechungsgesetz gilt für die Winkel α des einfallenden und β des gebrochenen Strahls die Beziehung $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, wobei n der (relative) Brechungsindex ist. Wie wirken sich Fehler bei der Bestimmung von α und β auf n aus?

Lösung: Nach dem Fehlerfortpfanzungsgesetz ist

$$\Delta n \approx \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial\alpha}\Delta\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial\beta}\Delta\beta\right)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}(\Delta\alpha)^2 + \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^4\beta}(\Delta\beta)^2}\,.$$

3) Zehn Dämonen seien nach den Regeln des LAPLACEschen Fehlermodells damit beschäftigt, Ihre Meßergebnisse zu verfälschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ergebnis trotzdem richtig ist?

Lösung: Ein richtiges Ergebnis gibt es offenbar genau dann, wenn jeweils fünf der Dämonen um $+\varepsilon$ *bzw.* $-\varepsilon$ verfälschen. Das sind $\binom{10}{5} = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6/5! = 252$ der 2^{10} Möglichkeiten; die Wahrscheinlichkeit ist also $252 : 1024$ oder etwa 24,61%.

4) Eine Meßreihe habe Mittelwert 3,8 und Standardabweichung 0,1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der dritte Meßwert größer als vier?

Lösung: Vier ist um zwei Standardabweichungen größer als der Mittelwert, die Wahrscheinlichkeit, daß der dritte (oder sonst irgendein fester) Meßwert größer ist, liegt also bei $1 - F(2) \approx 0{,}02275$ mit

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt\,.$$

5) *Richtig oder falsch:* Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x, so ist X^2 eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x^2.

Lösung: *Falsch:* Ist X etwa standard-normalverteilt, so ist $\mathbb{E}(X) = 0$, aber $\mathbb{E}(X^2) = \operatorname{Var}(X) = 1 \neq 0^2$.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Der jährliche Höchststand des Pegels Haltern des Flusses Stever ist mit ziemlich guter Genauigkeit normalverteilt mit Mittelwert 4 m und Standardabweichung 2 m. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er 2007 zwischen zwei und drei Metern liegt?

Lösung: $F(z)$ sei hier stets die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Die Pegelstände $2\,m$ und $3\,m$ liegen eine *bzw.* eine halbe Standardabweichung unter dem Mittelwert, die Wahrscheinlichkeit ist also

$$F(-0{,}5)-F(-1) = \bigl(1-F(0{,}5)\bigr)-\bigl(1-F(1)\bigr) = F(1)-F(0{,}5) \approx 0{,}841345-0{,}691462 = 0{,}14988$$

oder etwa 15%.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fluß nächstes Jahr irgendwann einen Pegelstand von mehr als sieben Meter erreicht?

Lösung: Das wären mehr als die eineinhalbfache Standardabweichungen; die Wahrscheinlichkeit dafür ist

$$1 - F(3/2) \approx 0{,}0668\,.$$

c) Was können Sie über die entsprechende Wahrscheinlichkeit für letztes Jahr sagen?

Lösung: Da das letzte Jahr vorbei ist, gab es entweder einmal einen Pegelstand von über sieben Meter oder nicht; die Wahrscheinlichkeit ist also entweder eins oder null. Wer Genaueres wissen will, frage einen kundigen Einwohner von Haltern.

d) Ab welchem Pegelstand kann man von einem Jahrhunderthochwasser reden?

Lösung: Ein Jahrhunderthochwasser tritt auf, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen so hohen Pegelstand höchstens $1/100$ ist. Die Gleichung $F(z) = 0{,}99$ hat die Lösung $z \approx 2{,}33$, der Pegelstand muß also mindestens $4 + 2{,}33 \cdot 2 = 8{,}66$ m betragen.

e) Was können Sie über Jahrhhunderttiefststände sagen?

Lösung: Wegen der Formel $F(-z) = 1-F(z)$ muß hier der Pegellstand um 2,33 Standardabweichungen *unter* dem Mittelwert liegen, also bei -66 cm. Ob das physikalisch möglich ist, hängt von den lokalen Gegebenheiten in Haltern ab; möglicherweise ist man hier aber schon in einem Bereich, in dem die Approximation durch eine Normalverteilung nicht mehr richtig sein kann.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

Ein beliebtes, weil einfaches Verfahren zur näherungsweisen Erzeugung (standard)-normalverteilter Zufallsvariablen besteht darin, daß man zwölf voneinander unabhängige im Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen addiert und sechs vom Ergebnis subtrahiert. Begründen Sie, warum dieses Verfahren einigermaßen brauchbare Ergebnisse liefert!

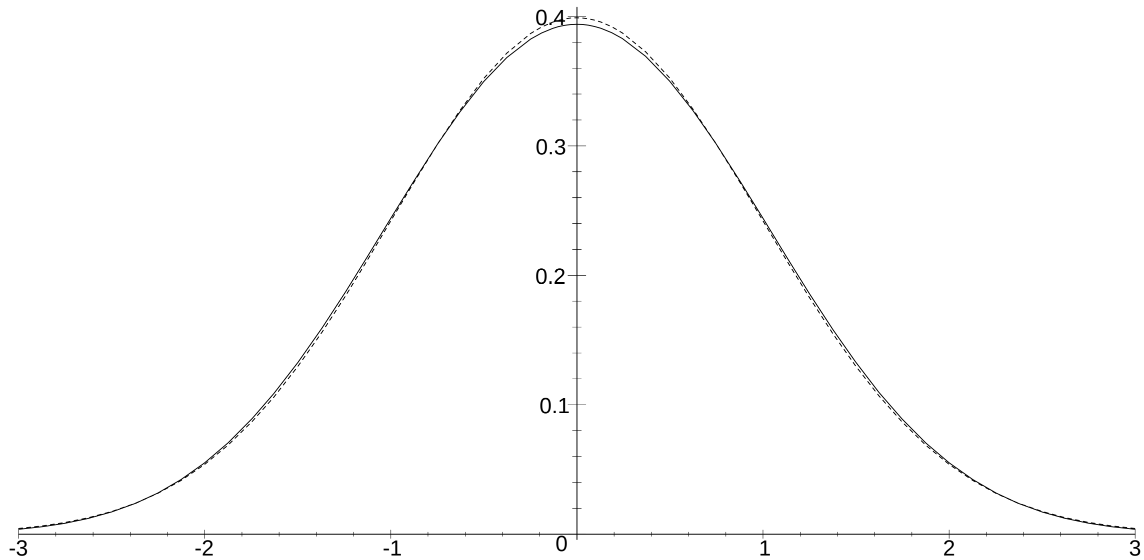
Lösung: Jede einzelne der Zufallsvariablen hat Erwartungswert $\frac{1}{2}$ und Varianz

$$\int_0^1 \Bigl(x-\frac{1}{2}\Bigr)^2\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} u^2\,du = \frac{1}{12}\,;$$

die Summe hat also Erwartungswert sechs und Varianz eins. Nach Subtraktion von sechs erhalten wir eine Zufallsvariable mit Erwartungswert null und Varianz eins.

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist eine Summe voneinander unabhängiger identischer Zufallsvariablen mit wachsender Zahl der Summanden in immer besserer Näherung normalverteilt; zwölf Summanden sind zwar noch nicht sonderlich viel, aber einigermaßen sollte die Normalverteilung doch angenähert werden.

NB: Tatsächlich wird sie sogar recht gut angenähert: Untenstehende Abbildung zeigt die Verteilungsdichte fett ausgezogen und dazu gestrichelt die Verteilungsdichte einer Normalverteilung:



Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) In zehn preußischen Kavallerieregimentern wurden über zwanzig Jahre hinweg die jährlichen Todesfälle durch Hufschlag gezählt: 109 mal gab es *keine* Todesfälle, 65 mal einen, 22 mal zwei, dreimal drei und einmal kam es vor, daß ein Regiment während eines Jahres vier Tote zu beklagen hatte. Finden Sie eine POISSON-Verteilung, die diese Zahlen ungefähr beschreiben könnte, und vergleichen Sie die aufgrund dieser Verteilung berechneten Wahrscheinlichkeiten mit den beobachteten Häufigkeiten!

Lösung: Insgesamt gab es

$$65 \cdot 1 + 22 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 122$$

Todesfälle durch Hufschlag, also im Mittel

$$\frac{122}{10 \cdot 20} = 0{,}61$$

pro Jahr und Regiment. Falls sich die Häufigkeiten pro Jahr und Regiment durch eine POISSON-Verteilung beschreiben lassen, sollte deren Erwartungswert gleich diesem Mittel sein. Da der Erwartungswert einer POISSON-Verteilung gleich dem Parameter ist, vergleichen wir also mit einer POISSON-Verteilung mit Parameter $\lambda = 0{,}61$; die erwartete Wahrscheinlichkeit für k Todelsfälle in einem Jahr und Regiment ist dann

$$P(X = k) = \frac{e^{-0{,}61} \cdot 0{,}61^k}{k!} \approx \frac{0{,}331444 \cdot 0{,}61^k}{k!} \,.$$

Die erwartete Anzahl von Fällen, daß es in einem Jahr in einem Regiment k Todesfälle durch Hufschlag gab, ist $200 \cdot P(X = k)$, da es 200 Paare aus Jahren und Regimentern gibt. In Zahlenwerten ergibt sich (auf zwei Nachkommastellen gerundet)

k	*tatsächliche Fallzahl*	*tatsächliche Häufigkeit*	*berechnete Wahrscheinlichkeit*	*berechnete Fallzahl*
0	109	54,50%	54,34%	108,67
1	65	32,50%	33,14%	66,29
2	22	11,00%	10,11%	20,22
3	3	1,50%	2,06%	4,11
4	1	0,50%	0,31%	0,63
≥ 5	0	0,00%	0,04%	0,08

Die letzte berechnete Wahrscheinlichkeit 0,08 wurde berechnet als eins minus Summe der darüberstehenden Werte. Wie man sieht ist die Übereinstimmung zwischen theoretisch berechneten und tatsächlich beobachteten Werten in der Tat sehr gut (weshalb dieses Beispiel auch in vielen Statistiklehrbüchern zu finden ist).

b) Welche Verteilung beschreibt näherungsweise die Gesamtzahl der in einem Jahr durch Hufschlag getöteten Offiziere aus allen zehn Regimentern?

Lösung: Da Tod durch Hufschlag auch auf alle zehn Regimenter bezogen ein seltenes Ereignis ist, können wir auch hier von einer POISSON-Verteilung ausgehen. Deren Parameter λ der POISSON-Verteilung ist gleich dem Erwartungswert, und Erwartungswerte addieren sich; also ist der Parameter der Summenverteilung gleich der Summe der Parameter der Summanden. Hier geht es um zehn Verteilungen mit identischem Parameter $\lambda = 0{,}61$; die Summe ist also POISSON-verteilt mit Parameter 6,1.