WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

29. Oktober 2007

9. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist $\vec{v}$ ein Hauptvektor der Stufe k und $\vec{w}$ einer der Stufe $\ell > k$, so ist $\vec{v} + \vec{w}$ ein Hauptvektor der Stufe ℓ.

2) Richtig oder falsch: Wenn das System $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ eine nichtkonstante periodische Lösung hat, hat die Matrix A zwei nichtreelle konjugiert komplexe Eigenwerte.

3) Was können Sie über A sagen, wenn es eine spiralförmige Lösungskurve gibt?

4) Richtig oder falsch: Hat $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ eine reelle symmetrische Matrix A, so ist jede reelle Lösung eine Linearkombination von reellen Exponentialfunktionen.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Compute the space of solution of the following system of linear differential equations:

$$\dot{u}(t) = v(t) - u(t), \quad \dot{v}(t) = -v(t), \quad \dot{x}(t) = x(t) + y(t), \quad \dot{y}(t) = y(t) + z(t), \quad \dot{z}(t) = z(t)\,!$$

b) Determine the subspace of all solutions which remain bounded for $t \to \infty$!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die Hauptvektoren zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$!

b) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat!

c) Berechnen Sie die Matrizen A^{100} und e^{At}!

e) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= - y(t) + z(t), & x(0) &= 2 \\ \dot{y}(t) &= 2x(t) - 4y(t) + 2z(t), & y(0) &= 1 \\ \dot{z}(t) &= 3x(t) - 5y(t) + 2z(t), & z(0) &= 0 \end{aligned}$$

f) Was können Sie über das Langzeitverhalten dieser Lösung sagen?

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

c) Berechnen Sie die Matrizen e^A und e^{At}!

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 7y(t) - 7z(t), & x(0) &= 0 \\ \dot{y}(t) &= -x(t) - 3y(t) - z(t), & y(0) &= 1 \\ \dot{z}(t) &= x(t) + 8y(t) + 6z(t), & z(0) &= -1 \end{aligned}$$

e) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Abgabe bis zum Montag, dem 5. November 2007, um 15.30 Uhr