WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

29. Oktober 2007

9. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ und bestimmen Sie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -7 & -7 \\ -1 & -3-\lambda & -1 \\ 1 & 8 & 6-\lambda \end{vmatrix} ;$$

da es keine offensichtliche Möglichkeit zur Vereinfachung der Determinante gibt, entwickeln wir einfach nach der ersten Spalte und erhalten

$$\begin{aligned} &(-2-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 8 & 6-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -7 & -7 \\ 8 & 6-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & -7 \\ -3-\lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+2)\big((-3-\lambda)(6-\lambda)+8\big) + \big(7\lambda-42+56\big) + \big(7-21-7\lambda\big) \\ &= -(\lambda+2)(-18+3\lambda-6\lambda+\lambda^2+8) + (7\lambda-14) + (14-7\lambda) \\ &= -(\lambda+2)(\lambda^2-3\lambda-10) . \end{aligned}$$

Die beiden Nullstellen des quadratischen Faktors haben Produkt -10 und Summe 3, sind also 5 und -2. Somit hat

$$\det(A - \lambda E) = -(\lambda+2)^2(\lambda-5)$$

die beiden Nullstellen -2 und 5.

Es gibt also zwei Eigenwerte: $\lambda = 5$ hat die algebraische und damit auch geometrische Vielfachheit eins, $\lambda = -2$ hat die algebraische Vielfachheit zwei. Zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheit müssen wir die Dimension des Eigenraums berechnen: Die Matrix

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

hat offensichtlich den Rang zwei, denn die beiden letzten Spalten sind identisch, und die erste ist davon linear unabhängig. Also ist der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $(A+2E)\vec{x} = \vec{0}$ nur eindimensional; der Eigenwert hat somit die geometrische Vielfachheit eins.

b) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren und ggf. Hauptvektoren von A!

Lösung: Der speziellen Form der Matrix $A + 2E$ sieht man sofort an, daß der Vektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

das Gleichungssystem löst; er spannt also den Eigenraum auf.

Zur Bestimmung des Hauptraums berechnen wir

$$(A+2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 8 & 8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -49 & -49 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 49 \end{pmatrix} ;$$

im Hauptraum liegen also *alle* Vektoren, deren zweite und dritte Komponente sich zu null ergänzen. Als von $\vec{v}_1$ linear unabhängigen zweiten Basisvektor des Hauptraums können wir zum Beispiel

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

nehmen.

Um zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ zu kommen, brauchen wir noch einen Eigenvektor zum Eigenwert fünf. Hier ist

$$A - 5E = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -7 \\ -1 & -8 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix} ;$$

es genügt also, dier erste und die dritte Zeile zu betrachten. Wenn wir die erste gleich durch -7 dividieren, erhalten wir für die Komponenten des gesuchten Eigenvektors die beiden Gleichungen

$$x + y + z = 0 \quad \text{und} \quad x + 8y + z = 0 \,,$$

aus denen sofort folgt, daß $y = 0$ sein muß und $x = -z$. Als dritten Basisvektor können wir also zum Beispiel den Vektor

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nehmen.

c) Berechnen Sie die Matrizen e^A und e^{At} !

Lösung: Wir müssen zunächst die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ bezüglich der Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bestimmen. Da in den Spalten dieser Matrix die Bilder der Basisvektoren stehen, brauchen wir also die Vektoren $A\vec{v}_i$, was im Falle der beiden Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ kein Problem ist: Die werden einfach mit dem zugehörigen Eigenwert multipliziert. Für $\vec{v}_2$ müssen wir rechnen:

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -7 & -7 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -2\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \,.$$

Somit ist die neue Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

wobei die Diagonalmatrix D und die hintere Matrix N offensichtlich kommutieren. Also ist

$$e^M = e^D e^N = e^D(E + N) = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2} & -e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^5 \end{pmatrix} .$$

Genauso folgt auch

$$e^{Mt} = e^{Dt} e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & -te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} .$$

Dies muß nun noch zurücktransformiert werden auf die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$; die Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis zur neuen Basis enthält die Vektoren $\vec{v}_i$ als Spalten, ist also

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse dazu berechnet man entweder nach GAUSS, oder aber, indem man die Vektoren der Standardbasis in der neuen Basis hinschreibt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{v}_1 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3\,;$$

somit ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und Ausmultiplizieren führt auf

$$e^{At} = Be^{Mt}B^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{5t} & e^{-2t} - e^{5t} \\ -te^{-2t} & e^{-2t} - te^{-2t} & -te^{-2t} \\ te^{-2t} & e^{5t} - e^{-2t} + te^{-2t} & e^{5t} + te^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen von $t = 1$ schließlich oder die Berechnung von $Be^{M}B^{-1}$ führen auf

$$e^{A} = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2} - e^{5} & e^{-2} - e^{5} \\ -e^{-2} & 0 & -e^{-2} \\ e^{-2} & e^{5} & e^{5} + e^{-2} \end{pmatrix}.$$

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) - 7y(t) - 7z(t), & x(0) &= 0 \\ \dot{y}(t) &= -x(t) - 3y(t) - z(t), & y(0) &= 1 \\ \dot{z}(t) &= x(t) + 8y(t) + 6z(t), & z(0) &= -1 \end{aligned}$$

Lösung: Dies ist ein System homogener linearer Differentialgleichungen mit Matrix A; die gesuchte Lösung ist also

$$e^{At}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix},$$

d.h. $x(t) = 0$, $\quad y(t) = e^{-2t}$ und $\quad z(t) = -e^{-2t}$.

e) Ist das Langzeitverhalten dieser Lösung stabil gegenüber Störungen der Anfangsbedingungen?

Lösung: Nein, denn A hat auch den Eigenwert 5. Stört man die Anfangsbedingungen auch nur leicht in Richtung des zugehörigen Eigenvektors, kommen Terme mit e^{5t} ins Spiel, die Lösungsfunktionen gehen also betragsmäßig gegen unendlich statt gegen null.