

22. Oktober 2007

8. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x + 20$?
- 2) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^3 - 21x - 20$?
- 3) *Richtig oder falsch:* Falls das Polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ nur ganzzahlige Nullstellen hat und a, b, c gerade sind, sind auch alle Nullstellen gerade.
- 4) Unter welchen Bedingungen an a, b, c können Sie sagen, daß das Polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ mit lauter ganzzahligen Nullstellen nur ungerade Nullstellen hat?
- 5) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ist HERMITESCH.
- 6) *Richtig oder falsch:* Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist ${}^t A \bar{A}$ HERMITESCH.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Zu Halloween füllt die NASA einen ausgehöhlten Riesenkürbis *Dill's Atlantic Giant* von 250 kg mit 100 kg Raketentreibstoff und setzt einen 20 kg schweren Raketenmotor ein; gestartet wird senkrecht nach oben. Nach dem russischen Raketenpionier KONSTANTIN ZIOLKOWSKIĀ (1857–1935) erreicht der Kürbis im gravitationsfreien Vakuum eine Beschleunigung von $a(t) = -w_0 \dot{m}(t)/m(t)$, wobei $w_0 = 4,5$ km/s die Austrittsgeschwindigkeit des Treibstoffs bezeichnet und $m(t)$ die Masse des gesamten Systems zur Zeit t . Dagegen arbeiten die Erdbeschleunigung $g \approx 9,81$ m/s² und der hier vernachlässigte Luftwiderstand. Der Raketenmotor verbraucht pro Sekunde 5 kg Treibstoff. Welche Höhe erreicht der Kürbis, und wann prallt er mit welcher Geschwindigkeit am Boden auf?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Compute the eigenvalues and eigenvectors of the matrix $A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -8 \\ -28 & 15 & 14 \\ 16 & 0 & -8 \end{pmatrix}$!
- b) What is e^A ?
- c) Solve the initial value problem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 16x(t) && - 8z(t), && x(0) = 1 \\ \dot{y}(t) &= -28x(t) + 15y(t) + 14z(t), && && y(0) = 0 \\ \dot{z}(t) &= 16x(t) && - 8z(t), && z(0) = 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Welche Bedingungen müssen die komplexen Zahlen a, b, c erfüllen, damit die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2i & b \\ c & 3 & c \\ a & 2i & b \end{pmatrix}$$

- a) symmetrisch b) HERMITESCH ist?
- c) In welchen Fällen können Sie sicher sein, daß alle Eigenwerte von A reell sind?

Abgabe bis zum Montag, dem 29. Oktober 2007, um 15.30 Uhr