Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

8. Oktober 2007

6. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist auch $f\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Das war schon in Aufg. 3 des vorigen Übungsblatts!*

2) Richtig oder falsch: Für $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt auch für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Funktion $g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$ in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3) Richtig oder falsch: Für jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$.

4) Richtig oder falsch: Falls $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existiert und nicht verschwindet, liegt f nicht in $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

5) Richtig oder falsch: $T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ mit $T(\varphi) = \dot{\varphi}(0) - |\varphi(2)|$ ist eine Distribution.

Aufgabe 1: (*7 Punkte)*

a) What are the L^2 norms of the functions

$$f(t) = \frac{1}{1+it}, \quad g(t) = \frac{1}{\cosh t} \quad \text{and} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } \exists n \in \mathbb{N} : n - \dfrac{1}{2n^2} < t < n + \dfrac{1}{2n^2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} ?$$

Hint: $\dfrac{d}{dt} \tanh t = \dfrac{1}{\cosh^2 t}$

b) Determine the L^2 norms of the Fourier transforms $\widehat{f}(\omega), \widehat{g}(\omega)$ and $\widehat{h}(\omega)$!

c) What is $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt$?

Aufgabe 2: (*3 Punkte)*

a) Was ist die Fourier-Transformierte der Dirac-Distribution Δ_a?

b) Gibt es eine Funktion f, so daß $\widehat{\Delta}_a = T_f$ ist?

c) Was gilt im Spezialfall $a = 0$?

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und berechnen Sie ihre Ableitungen im Distributionensinne. Geben Sie diese Ableitungen, eventuell unter Verwendung von $\delta(t)$, auch als „Funktionen" an!

a) $f(t) = [t]$, wobei $[t]$ die größte ganze Zahl $s \leq t$ bezeichnet. *b)* $g(t) = t - [t]$

c) $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 1 \\ t+1 & \text{für } -1 \leq t < 0 \\ t-1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

Abgabe bis zum Montag, dem 15. Oktober 2007, um 15.30 Uhr