

20. August 2007

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: (je zwei Punkte)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = -i$!

Lösung: Da $-i = e^{-\pi i/2}$, ist $z = e^{-\pi i/4} = \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ eine Lösung. (Die andere ist natürlich $-z$.)

Alternativ: Schreibe $z = x + iy$. Dann ist $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -i$ genau dann, wenn $x = \pm y$ und $2xy = -1$ ist. Also muß $x = -y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ sein.

- 2) Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe von $f(t) = 4 \cos^3 t - \cos 3t$!

Lösung:

$$\begin{aligned} 4 \cos^3 t - \cos 3t &= 4 \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 - \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} \\ &= \frac{e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}}{2} - \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} = \frac{3e^{it} + 3e^{-it}}{2} = 3 \cos t. \end{aligned}$$

- 3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig*, denn sie hat offensichtlich die drei verschiedenen Eigenwerte 1, 2 und 3; nehmen wir für jeden einen Eigenvektor, so erhalten wir drei linear unabhängige Vektoren aus \mathbb{R}^3 , also eine Basis.

- 4) *Richtig oder falsch:* Für jede reelle $n \times n$ -Matrix A ist $(e^A)^2 = e^{2A}$.

Lösung: *Richtig:* Da A mit sich selbst kommutiert, ist $(e^A)^2 = e^A \cdot e^A = e^{A+A} = e^{2A}$.

- 5) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = e^{\cos y(t)}$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Richtig:* Die Ableitung $-\sin y \cdot e^{\cos y}$ von $e^{\cos y}$ kann höchstens den Betrag e haben, ist also beschränkt. Daher gibt es eine LIPSCHITZ-Konstante, und der Satz von PICARD-LINDELÖF ist anwendbar.

- 6) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = 2x(t) + y(t)!$$

Lösung: (x, y) ist genau dann ein Gleichgewichtspunkt, wenn $x^2 - y = 0$ und $2x + y = 0$ ist. Also muß $2x + x^2 = x(x + 2)$ verschwinden, d.h. $x = 0$ oder $x = -2$. Die beiden Fixpunkte sind somit $(0, 0)$ und $(-2, 4)$.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Für welche(s) der folgenden Integrale kann der Residuensatz zur Berechnung verwendet werden?

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}, \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 2x + 5}, \quad c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^2 + 2x + 5}$$

Hat eines dieser Integrale den Wert unendlich?

Berechnen Sie eines der Integrale mit endlichem Wert!

Lösung: Die Integrale aus b) und c) können offensichtlich nicht über den Residuensatz berechnet werden, denn dazu muß ja der Nennergrad des Integranden um mindestens zwei größer sein als der Zählergrad. Im Falle von a) ist zumindest diese Bedingung erfüllt. Für die Anwendbarkeit des Residuensatzes benötigen wir noch zusätzlich, daß der Nenner keine reellen Nullstellen hat. Offensichtlich verschwindet $x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4$ genau für $x = -1 \pm 2i$, die Bedingung ist also erfüllt und der Residuensatz anwendbar.

Beim Integral aus c) ist der Limes des Integranden für $x \rightarrow \pm\infty$ gleich eins; damit muß das Integral divergieren. (Es gibt beispielsweise ein $c > 0$, so daß der Integrand für $|x| > c$ mindestens gleich $1/2$ ist, und damit ist klar, daß das Integral von $-\infty$ nach ∞ keinen endlichen Wert haben kann.)

Das einzige Integral, bei dem wir einen endlichen Wert erwarten können, ist das aus a); berechnen wir also dieses.

Die einzige Nennernullstelle mit positivem Imaginärteil ist $-1 + 2i$; nach dem Satz aus der Vorlesung ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1+2i} \frac{1}{z^2 + 2z + 5}.$$

Da der Nenner nur einfache Nullstellen hat, ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-1+2i} \frac{1}{z^2 + 2z + 5} &= \lim_{z \rightarrow -1+2i} \frac{z - (-1 + 2i)}{(z - (-1 + 2i))(z - (-1 - 2i))} \\ &= \lim_{z \rightarrow -1+2i} \frac{1}{z - (-1 - 2i)} = \frac{1}{(-1 + 2i) - (-1 - 2i)} = \frac{1}{4i}. \end{aligned}$$

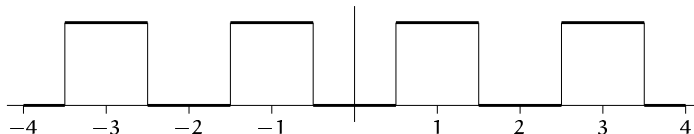
$$\text{Somit ist } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode zwei. Für $|t| < \frac{1}{2}$ sei $f(t) = 0$, und für $\frac{1}{2} < |t| < 1$ sei $f(t) = 1$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-4, 4]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist gerade.

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

Lösung: Da f eine gerade Funktion ist, gibt es keine Sinusterme. Die Periode ist zwei, also ist $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Der konstante Term ist der Mittelwert über eine Periode, also gleich $\frac{1}{2}$.

Da f gerade ist, können wir den Koeffizienten a_k von $\cos k\pi t$ berechnen als

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(t) \cos k\pi t \, dt = 2 \int_0^1 f(t) \cos k\pi t \, dt = 2 \int_{1/2}^1 \cos k\pi t \, dt \\ &= \frac{2 \sin k\pi t}{k\pi} \Big|_{1/2}^1 = -\frac{2 \sin \frac{k\pi}{2}}{k\pi}, \end{aligned}$$

denn der Sinus verschwindet bei allen ganzzahligen Vielfachen von π .

Aus diesem Grund verschwindet auch $\sin \frac{k\pi}{2}$ für alle geraden Indizes k ; für ungerades $k = 2\ell + 1$ erhalten wir eins für gerade ℓ und -1 für ungerade, also insgesamt $(-1)^\ell$. Kombiniert mit dem Minuszeichen vor dem Sinus ergibt das $(-1)^{\ell+1}$, die FOURIER-Reihe von f ist also

$$\frac{1}{2} + 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell+1)\pi} \cos(2\ell+1)\pi t.$$

- d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Lösung: Genau an den Unstetigkeitsstellen, also bei den Zahlen der Form $m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Die Reihe konvergiert dort gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigen Grenzwert, also gegen $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

Lösung: Nach Definition ist

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt = \int_{-1}^1 (1 - |t|) e^{-i\omega t} \, dt = \int_{-1}^1 e^{-i\omega t} \, dt + \int_{-1}^0 t e^{-i\omega t} \, dt - \int_0^1 t e^{-i\omega t} \, dt.$$

Für das erste Integral kennen wir die Stammfunktion $e^{-i\omega t}/(-i\omega) = \frac{i}{\omega} e^{-i\omega t}$; für die beiden anderen steht die Stammfunktion im Anhang zur Klausur. Somit ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}) + \frac{-1}{-\omega^2} - \frac{i\omega - 1}{-\omega^2} e^{i\omega} - \frac{-i\omega}{-\omega^2} e^{-i\omega} + \frac{-1}{-\omega^2} \\ &= \frac{2 \sin \omega}{\omega} + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2 \sin \omega}{\omega} - \frac{2 \cos \omega}{\omega^2}. \end{aligned}$$

- b) Was ist die LAPLACE-Transformierte von f ?

Lösung: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt = \int_0^1 t e^{-st} \, dt$ läßt sich ebenfalls mit der Formel aus

dem Anhang berechnen zu $\frac{-st - 1}{s^2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{s^2} + \frac{s+1}{s^2} e^{-s}$.

- c) Wo verschwindet die Faltung $f * f$?

Lösung: $f * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)f(s) \, ds$ verschwindet für $|t| \geq 2$, da dann der Integrand für jedes s verschwindet. Für $|t| < 2$ gibt es stets zumindest ein Teilintervall, in dem der Integrand positiv ist; da er nirgends negativ wird, ist dort daher $f * f(t) \neq 0$.

d) Was ist die FOURIER-Transformierte von $f * f$?

Lösung: Das Quadrat von $\hat{f}(\omega)$, also

$$\left(\frac{2 \sin \omega}{\omega} + \frac{2}{\omega^2} - \frac{2 \sin \omega}{\omega} - \frac{2 \cos \omega}{\omega^2} \right)^2.$$

Aufgabe 4: (12 Punkte)

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Wir berechnen das charakteristische Polynom von A durch Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda) \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 2 \\ -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)((\lambda + 5)(\lambda + 1) + 4) = (3 - \lambda)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = (3 - \lambda)(\lambda + 3)^2. \end{aligned}$$

Es gibt also die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm 3$. $\lambda_1 = 3$ hat die algebraische und damit auch geometrische Vielfachheit eins; $\lambda_2 = -3$ hat algebraische Vielfachheit zwei.

Der Eigenraum zu $\lambda_1 = 3$ wird offensichtlich aufgespannt vom zweiten Basisvektor, denn A mal der zweite Basisvektor ist die zweite Spalte der Matrix, und die ist gerade das Dreifache dieses Vektors. Also haben wir den Eigenvektor $\vec{v}_1 = \vec{b}_2$.

Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -3$ werden von der Matrix

$$A + 3E = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

annuliert. Wie uns deren zweite Zeile zeigt, muß die zweite Komponente eines jeden Eigenvektors verschwinden, und nach den beiden anderen Zeilen muß die erste Komponente gleich der dritten sein. Der Eigenraum ist daher nur eindimensional und wird aufgespannt

vom Vektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die geometrische Vielfachheit von λ_2 ist also gleich eins.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein*, denn die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts -3 ist kleiner als die algebraische.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

Lösung: Wir haben bereits zwei Eigenvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 ; da λ_2 geometrische Vielfachheit eins aber algebraische Vielfachheit zwei hat, brauchen wir noch einen Hauptvektor zweiter Stufe für λ_2 . Da

$$(A + 3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist, besteht der Hauptraum aus allen Vektoren mit zweiter Komponente null; ein solcher Vektor, der nicht im Eigenraum liegt, ist beispielsweise der dritte Basisvektor $\vec{v}_3 = \vec{b}_3$.

Wegen

$$A\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat A bezüglich der Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ die Dreiecksgestalt

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

d) Was ist $e^{\Delta t}$ für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Wir schreiben $\Delta = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da N den dritten Basisvektor auf zweimal den zweiten abbildet und diesen wiederum auf den Nullvektor, ist N^2 die Nullmatrix. Außerdem kommutieren N und D, also ist

$$\begin{aligned} e^{\Delta t} &= e^{D+Nt} = e^{Dt} e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} (E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 2te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ aussieht, brauchen wir die Inverse zur Matrix B des Basiswechsels; letztere hat die Vektoren \vec{v}_1, \vec{v}_2 und \vec{v}_3 als Spalten, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wie man entweder sofort sieht oder nach einer Zeilenvertauschung und einer Zeilenoperation mit dem GAUSS-Algorithmus. Damit ist

$$e^{\Delta t} = B e^{\Delta t} B^{-1} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-3t} & 0 & 2te^{-3t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ -2te^{-3t} & 0 & (2t+1)e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -5x(t) + 2z(t), \quad \dot{y}(t) = 3y(t), \quad \dot{z}(t) = -2x(t) - z(t)$$

mit $x(0) = 1, y(0) = 0$ und $z(0) = -1$! Falls Sie Teil d) nicht gelöst haben, können Sie

hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“ $e^{\Delta t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3te^{-2t} & 2 & -2te^{-2t} \\ 0 & e^t & te^t \\ 3te^{-2t} & 3 & e^{-2t} + 3te^{-2t} \end{pmatrix}$ arbeiten.

Lösung: Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, und seine Koeffizientenmatrix ist die gerade betrachtete Matrix A. Die einzige Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{\Delta t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2t)e^{-3t} & 0 & 2te^{-3t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ -2te^{-3t} & 0 & (2t+1)e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-4t)e^{-3t} \\ 0 \\ -(1+4t)e^{-3t} \end{pmatrix},$$

d.h. $x(t) = (1-4t)e^{-3t}, y(t) = 0$ und $z(t) = -(1+4t)e^{-3t}$.

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \rightarrow \infty$?

Lösung: Die x- und z-Komponente gehen gegen null, da e^{-3t} schneller gegen null geht als der lineare Vorfaktor gegen $-\infty$. Die y-Komponente bleibt konstant null.

g) Wie ändert sich das Langzeitverhalten von $x(t)$ und $y(t)$ bei einer leichten Veränderung der Anfangsbedingungen?

Lösung: Sobald der Anfangswert für $y(t)$ nicht mehr verschwindet, geht $y(t)$ gegen $\pm\infty$ statt identisch zu verschwinden. Am qualitativen Verhalten von $x(t)$ und $z(t)$ ändert sich nichts.

Aufgabe 5: (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 4 \cos 3t + 12 \sin 3t !$$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 0$ hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda + 2)^2 + 1 = 0 ,$$

die Nullstellen sind also $\lambda_{1/2} = -2 \pm i$, und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist $y(t) = e^{-2t}(a \cos t + b \sin t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, denn die Differenz zweier Lösungen erfüllt die homogene Gleichung.

Erfahrungsgemäß findet man bei Gleichungen dieser Bauart oft eine spezielle Lösung, die von ähnlicher Bauart ist wie die rechte Seite der Gleichung; wir können als unser Glück versuchen mit einem Ansatz der Form $x(t) = c \cos 3t + d \sin 3t$. Dann ist

$$\dot{x}(t) = 3d \cos t - 3c \sin t \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -9c \cos t - 9d \sin t ,$$

also

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5x(t) &= (-9c + 12d + 5c) \cos t + (-9d - 12c + 5d) \sin t \\ &= (-4c + 12d) \cos t + (-12c - 4d) \sin t . \end{aligned}$$

Dies muß gleich der rechten Seite $4 \cos 3t + 12 \sin 3t$ sein, c und d sind somit Lösungen des linearen Gleichungssystems $-4c + 12d = 4$ und $-12c - 4d = 12$. Kürzen beider Gleichungen durch -4 macht daraus das angenehmere System

$$c - 3d = -1 \quad \text{und} \quad 3c + d = -3 .$$

Subtrahieren wir dreimal die erste Gleichung von der zweiten, erhalten wir die Gleichung $10d = 0$, d.h. $d = 0$ und $c = -1$. Die gesuchte allgemeine Lösung ist daher

$$y(t) = -\cos 3t + e^{-2t}(a \cos t + b \sin t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R} .$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \rightarrow \infty$?

Lösung: Da e^{-2t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $x(t) = -\cos 3t$, also gegen eine reine Schwingung.

Aufgabe 6: (3 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem $t\dot{y}(t) = y(t)^2$ mit $y(1) = 1$!

Lösung: Das ist offensichtlich eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen:

Wann immer $t \neq 0$ und $y(t) \neq 0$ ist, ist sie äquivalent zu $\frac{\dot{y}(t)}{y(t)^2} = \frac{1}{t}$.

Für die Lösung des Anfangswertproblems gilt daher

$$\int_1^{y(t)} \frac{d\eta}{\eta^2} = \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} , \quad \text{d.h.} \quad -\frac{1}{y(t)} + 1 = \ln t .$$

Damit ist $y(t) = \frac{1}{1 - \ln t}$.