Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

20. August 2007

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = -i$!

2) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(t) = 4\cos^3 t - \cos 3t$!

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

4) *Richtig oder falsch:* Für jede reelle $n \times n$-Matrix A ist $\left(e^A\right)^2 = e^{2A}$.

5) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot y(t) = e^{\cos y(t)}$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

6) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot x(t) = x(t)^2 - y(t) \quad \text{und} \quad \dot y(t) = 2x(t) + y(t)\,!$$

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*
Für welche(s) der folgenden Integrale kann der Residuensatz zur Berechnung verwendet werden?

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$, *b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+2x+5}$, *c)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+5}$

Hat eines dieser Integrale den Wert unendlich?
Berechnen Sie eines der Integrale mit endlichem Wert!

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode zwei. Für $|t| < \frac12$ sei $f(t) = 0$, und für $\frac12 < |t| < 1$ sei $f(t) = 1$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-4, 4]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f!

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser Fourier-Reihe das Gibbs-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$!

b) Was ist die LAPLACE-Transformierte von f?

c) Wo verschwindet die Faltung $f * f$?

d) Was ist die FOURIER-Transformierte von $f * f$?

Aufgabe 4: *(12 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = -5x(t) + 2z(t), \quad \dot{y}(t) = 3y(t), \quad \dot{z}(t) = -2x(t) - z(t)$$

mit $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $z(0) = -1$! *Falls Sie Teil d) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“* $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t} - 3te^{-2t} & 2 & -2te^{-2t} \\ 0 & e^t & te^t \\ 3te^{-2t} & 3 & e^{-2t} + 3te^{-2t} \end{pmatrix}$ *arbeiten.*

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

g) Wie ändert sich das Langzeitverhalten von $x(t)$ und $y(t)$ bei einer leichten Veränderung der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = 4\cos 3t + 12\sin 3t\,!$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Aufgabe 6: *(3 Punkte)*

Lösen Sie das Anfangswertproblem $t\dot{y}(t) = y(t)^2$ mit $y(1) = 1$!

$\mathcal{HILFSMITTEL}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

$\mathcal{HINWEISE}$

$$\int te^{at}\,dt = \frac{at-1}{a^2}e^{at} + C$$

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.