Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

20. August 2007

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $x + y = 0$ ist ein Untervektorraum.

Lösung: *Richtig:* $M \neq \emptyset$, da $\binom{0}{0} \in M$, und für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sowie zwei Vektoren $\binom{x}{y}, \binom{u}{v}$ aus M liegt $\lambda\binom{x}{y} + \mu\binom{u}{v} = \binom{\lambda x + \mu u}{\lambda y + \mu v}$ in M, denn

$$(\lambda x + \mu u) + (\lambda u + \mu v) = \lambda(x + y) + \mu(u + v) = 0\,.$$

2) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^5 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $\det A = 1$.

Lösung: *Richtig,* denn $(\det A)^5 = \det A^5 = \det E = 1$, und eins ist die einzige reelle Zahl x, für die $x^5 = 1$ ist.

3) Bestimmen Sie die Determinante der 5×5-Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Vertauscht man die erste Spalte mit der letzten, erhält man eine untere Dreiecksmatrix Δ mit Diagonaleinträgen $1, 2, 3, 4, 5$. Somit ist $\det\Delta = 5! = 120$ und $\det A = -\det\Delta = -120$, da eine Spaltenvertauschung das Vorzeichen ändert.

4) Geben Sie die Elemente von $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$ explizit an!

Lösung: Da das Quadrat jeder reellen Zahl ungleich null positiv ist, kann $x^2 + y^2 + z^2$ nur verschwinden, wenn $x = y = z = 0$ ist; V enthält daher nur den Nullvektor.

5) Geben Sie die Elemente von $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$ explizit an!

Lösung: In $\mathbb{F}_2$ ist jedes Element gleich seinem Quadrat; die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ist also äquivalent zu $x + y + z = 0$, und das wiederum zu $z = x + y$. Wir können also $x, y \in \mathbb{F}_2$ frei wählen und daraus z berechnen. Somit ist

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

6) Für welche $a \in \mathbb{C}$ sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a^3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{C}^2$ linear abhängig?

Lösung: Genau dann, wenn ihre Determinante $\begin{vmatrix} 1 & a^3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^4$ verschwindet, wenn also $a^4 = 1$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = \pm 1$ oder $a = \pm i$ ist.

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $f(x, y) = \sin(x+y^2)+\cos(x^2-y)$ um den Nullpunkt!

Lösung: Wie aus Schule und/oder Analysis I bekannt, ist

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos w = 1 - \frac{w^2}{2} + \frac{w^4}{24} + \cdots \ .$$

In diese Formeln müssen wir $z = x + y^2$ *bzw.* $w = x^2 - y$ einsetzen. Offensichtlich liefern dann die Potenzen z^n Linearkombinationen von Monomen in x, y vom Grad $\geq n$, d.h. das TAYLOR-Polynom vierten Grades von f besteht aus den Monomen vom Grad höchstens vier des Polynoms

$$(x + y^2) - \frac{(x + y^2)^3}{6} + 1 - \frac{(x^2 - y)^2}{2} + \frac{(x^2 - y)^4}{24} ,$$

ist also

$$x+y^2-\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2y^2}{6}+1-\frac{x^4}{2}+\frac{2x^2y}{2}-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24} = 1+x+\frac{1}{2}y^2-\frac{x^3}{6}+x^2y-\frac{x^4}{2}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{24} .$$

8) Was ist $\operatorname{div}\operatorname{grad}\operatorname{div}\begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$?

Lösung: $\operatorname{div}\begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} = \frac{\partial x^3}{\partial x} + \frac{\partial y^3}{\partial y} + \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$. Darauf müssen wir erst grad anwenden, dann div, insgesamt also den LAPLACE-Operator $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Hier ist jede der zweiten partiellen Ableitungen gleich sechs, also $\operatorname{div}\operatorname{grad}\operatorname{div}\begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} = 18$.

Aufgabe 1: (*9 Punkte*)
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome f vom Grad höchstens vier, und U sei der von den Polynomen

$$x^4 + x^2 + x, \;\; x^4 + x^2, \;\; x^4 + x, \;\; x^4, \;\; x^2 + x, \;\; x^2, \;\; x$$

erzeugte Untervektorraum.

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von U!

Lösung: Jedes der angegebenen Polynome ist eine Linearkombination von x^4, x^2 und x; da diese drei x-Potenzen auch für sich alleine dastehen, erzeugen sie U. Sie sind offensichtlich linear unabhängig, denn ist $\lambda x^4 + \mu x^2 + \nu x$ das Nullpolynom, müssen alle Koeffizienten gleich null sein. Somit können wir die drei Polynome x^4, x^2 und x als Basis $\mathcal{B}$ nehmen.

b) Welche Dimension hat U ?

Lösung: Da es eine dreielementige Basis gibt, ist $\dim V = 3$.

c) Zeigen Sie: $f \mapsto xf' - 2f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon U \to U$.

Lösung: Multiplikation mit x, Ableitung und Addition von Polynomen sind allesamt lieare Operationen, also definiert φ zumindest einmal eine lineare Abbildung in den Vektorraum *aller* reeller Polynome.
Zu zeigen bleibt, daß $\varphi(f)$ für $f \in V$ wieder in V liegt. Dazu reicht es, die Bilder der drei Polynome aus der Basis zu betrachten:

$$\varphi(x^4) = x \cdot 4x^3 - 2x^4 = 2x^4, \quad \varphi(x^2) = x \cdot 2x - 2x^2 = 0, \quad \varphi(x) = x \cdot 1 - 2x = -x$$

liegen offensichtlich alle drei in U.

d) Welche Dimensionen haben $\operatorname{Kern}\varphi$ und $\operatorname{Bild}\varphi$?

Lösung: Nach *c)* wird das Bild von φ erzeugt von den beiden Basispolynomen x^4 und x, ist also zweidimensional. Nach der Dimensionsformel ist daher

$$\dim \operatorname{Kern}\varphi = \dim U - \dim \operatorname{Bild}\varphi = 3 - 2 = 1\ .$$

Erzeugt wird der Kern natürlich vom x^2.

e) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *a)*?

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren; wie die Rechnungen aus *c)* zeigen, werden diese jeweils auf Vielfache von sich selbst abgebildet; die Abbildungsmatrix ist also die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f) Welche Eigenwerte hat diese Matrix?

Lösung: Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind die Diagonaleinträge, hier sind das also die Zahlen $2, 0$ und -1.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + \ y + \quad z &= 2 && (1) \\ 2x + 3y + \quad z &= 5 && (2) \\ 3x + 2y + a^2 z &= a + 3 && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist* $z = 1/(a+2)$.

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten und dreimal von der dritten:

$$\begin{aligned} y - \qquad\quad z &= 1 && (4) \\ -y + (a^2 - 3)z &= a - 3 && (5) \end{aligned}$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen ist

$$(a^2-4)z = a-2 \quad \text{oder} \quad (a+2)(a-2)z = a-2\,.$$

Für $a=-2$ steht hier $0=-4$; in diesem Fall ist das Gleichungssystem somit unlösbar.
Für $a=2$ erhalten wir die Gleichung $0z=0$, die von jeder reellen Zahl $z=\lambda$ erfüllt wird.
Für $a\neq\pm2$ schließlich können wir durch $(a+2)(a-2)$ dividieren und erhälten die einzige Lösung

$$z=\frac{1}{a+2}\,.$$

Nach Gleichung (4) ist dann

$$y=1+z=\begin{cases}1+\frac{1}{a+2}=\frac{a+3}{a+2} & \text{für } a\neq\pm2\\ 1+\lambda & \text{für } a=2\end{cases},$$

und nach Gleichung (1) ist

$$x=2-y-z=1-2z=\begin{cases}1-\frac{2}{a+2}=\frac{a}{a+2} & \text{für } a\neq\pm2\\ 1-2\lambda & \text{für } a=2\end{cases}.$$

$$\text{Somit ist } \mathcal{L}_a=\begin{cases}\left\{\left(\frac{a}{a+2},\frac{a+3}{a+2},\frac{1}{a+2}\right)\right\} & \text{für } a\neq\pm2\\ \left\{(1-2\lambda,1+\lambda,\lambda)\;\middle|\;\lambda\in\mathbb{R}\right\} & \text{für } a=2\\ \emptyset & \text{für } a=-2\end{cases}.$$

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&2&3\end{pmatrix}$!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist die Determinante

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\0&2-\lambda&0\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&0\\2&3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)\,;$$

die Eigenwerte sind also $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ und $\lambda_3=3$.
Da die erste Spalte von A den ersten Basisvektor enthält und die dritte das Dreifache des dritten, sind der erste *bzw.* dritte Basisvektor Eigenvektoren zu λ_1 *bzw.* λ_3, denn in den Spalten von A stehen ja die Produkte von A mit den Basisvektoren.
$A-2E=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}$; für einen Vektor $\vec{v}_2$ mit $(A-2E)\vec{v}_2=\vec{0}$ muß also die erste Komponente das Doppelte der zweiten sein und die dritte das negative Doppelte. Als Eigenvektoren zu $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ können wir daher die Vektoren

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

nehmen.

b) Hat $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

Lösung: Da wir drei Eigenvektoren haben, die offensichtlich linear unabhängig sind, bilden diese eine solche Basis.

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{v}$, für den zweiten nehmen wir eine Linearkombination $\vec{w} + \lambda\vec{v}$, deren Produkt mit $\vec{v}$ verschwindet:

$$(\vec{w} + \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = 2 + 4\lambda$$

verschwindet genau dann, wenn $\lambda = -\frac{1}{2}$ ist, der zweite Vektor der Orthonormalbasis ist also $\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst ist eins, also hat er bereits die Länge eins. $\vec{v}$ hat die Länge $\sqrt{4} = 2$, muß also noch mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden. Die gesuchte Orthonormalbasis besteht somit aus den Vektoren

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

b) *Ditto* für den von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3+4i \\ 5 \\ 3+4i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$!

Lösung: Wieder suchen wir als erstes eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{x}$, für den zweiten machen wir einen Ansatz $\vec{y} + \lambda\vec{x}$ derart, daß $(\vec{y} + \lambda\vec{x}) \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{x} + \lambda\vec{x} \cdot \vec{x}$ verschwindet. Hier ist

$$\vec{y} \cdot \vec{x} = 4i \cdot (3 - 4i) + 3 \cdot (3 - 4i) = 12i + 16 + 9 - 12i = 25 \quad \text{und} \quad \vec{x} \cdot \vec{x} = 4^2 + 3^2 = 25 ,$$

wir müssen also $\lambda = -1$ wählen und erhalten als zweiten Vektor der Orthogonalbasis

$$\vec{z} = \vec{y} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4i \end{pmatrix} .$$

Da $\vec{z} \cdot \vec{z} = 3^2 + 5^2 + 4^2 = 50$ ist und $\vec{x} \cdot \vec{x} = 25$, können wir für die gesuchte Orthonormalbasis also die beiden Vektoren $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\dfrac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4i \end{pmatrix}$ nehmen.

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto y \sin 3x + \cos^2 y + \sin xy \end{cases} !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von

SCHWARZ anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3y\cos 3x + y\cos xy \\ f_y(x,y) &= \sin 3x - 2\sin y\cos y + x\cos xy \\ f_{xx}(x,y) &= -9y\sin 3x - y^2\sin xy \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= 3\cos 3x + \cos xy - xy\sin xy \\ f_{yy}(x,y) &= 2\sin^2 y - 2\cos^2 y - x^2\sin xy \end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3y\cos 3x + y\cos xy \\ \sin 3x - 2\sin y\cos y + x\cos xy \end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -9y\sin 3x - y^2\sin xy & 3\cos 3x + \cos xy - xy\sin xy \\ 3\cos 3x + \cos xy - xy\sin xy & 2\sin^2 y - 2\cos^2 y - x^2\sin xy \end{pmatrix} .$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} e^x \sin y + x^3y^2 \\ \dfrac{e^y}{\cos x} + x^2y^3 \end{pmatrix} \end{cases} !$$

Lösung: Die erste Komponente $e^x\sin y + x^3y^2$ von $\vec{V}$ hat die partiellen Ableitungen

$$e^x\sin y + 3x^2y^2 \quad \text{und} \quad e^x\cos y + 2x^3y\,;$$

für die zweite Komponente $\dfrac{e^y}{\cos x} + x^2y^3$ erhalten wir entsprechend

$$\frac{e^y\sin x}{\cos^2 x} + 2xy^3 \quad \text{und} \quad \frac{e^y}{\cos x} + 3x^2y^2 .$$

Also ist $$J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x\sin y + 3x^2y^2 & e^x\cos y + 2x^3y \\ \dfrac{e^y\sin x}{\cos^2 x} + 2xy^3 & \dfrac{e^y}{\cos x} + 3x^2y^2 \end{pmatrix} .$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div}\vec{V}(x,y) = e^x\sin y + 3x^2y^2 + \frac{e^y}{\cos x} + 3x^2y^2 = e^x\sin y + \frac{e^y}{\cos x} + 6x^2y^2 .$$