WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

20. August 2007

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $x + y = 0$ ist ein Untervektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^5 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $\det A = 1$.

3) Bestimmen Sie die Determinante der 5×5-Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$!

4) Geben Sie die Elemente von $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$ explizit an!

5) Geben Sie die Elemente von $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$ explizit an!

6) Für welche $a \in \mathbb{C}$ sind die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a^3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{C}^2$ linear abhängig?

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vierten Grades von $f(x, y) = \sin(x+y^2)+\cos(x^2-y)$ um den Nullpunkt!

8) Was ist $\operatorname{div}\operatorname{grad}\operatorname{div} \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 1: (*9 Punkte)*
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome f vom Grad höchstens vier, und U sei der von den Polynomen

$$x^4 + x^2 + x,\;\; x^4 + x^2,\;\; x^4 + x,\;\; x^4,\;\; x^2 + x,\;\; x^2,\;\; x$$

erzeugte Untervektorraum.

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von U!

b) Welche Dimension hat U ?

c) Zeigen Sie: $f \mapsto xf' - 2f$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon U \to U$.

d) Welche Dimensionen haben Kern φ und Bild φ ?

e) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *a)*?

f) Welche Eigenwerte hat diese Matrix?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \qquad &(1)\\ 2x + 3y + z &= 5 \qquad &(2)\\ 3x + 2y + a^2 z &= a + 3 \qquad &(3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist* $z = 1/(a+2)$.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$!

b) Hat $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{R}^4$!

b) *Ditto* für den von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4i \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3+4i \\ 5 \\ 3+4i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto y \sin 3x + \cos^2 y + \sin xy \end{cases} !$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} e^x \sin y + x^3 y^2 \\ \dfrac{e^y}{\cos x} + x^2 y^3 \end{pmatrix} \end{cases} !$$

$\mathcal{HILFSMITTEL}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Abgabe bis zum Montag, dem 20. August 2007, um 13^{15} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •