WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

2. Juni 2007

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Im Vektorraum V aller reeller Polynome vom Grad höchstens fünf ist die Teilmenge $U = \{f \in V \mid f(0) \geq 0\}$ ein Untervektorraum.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise liegt das Polynom $f(x) = x + 1$ in U, nicht aber sein skalares Vielfaches $g = (-1) \cdot f$, denn $g(x) = -x - 1$ nimmt an der Stelle Null den Wert -1 an.

2) Welche Dimension hat der Vektorraum $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$?

Lösung: Er ist Kern der linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ abbildet auf $x + 2y + 3z$.

Deren Bild ist ganz $\mathbb{R}$, denn wäre es ein echter Untervektorraum, müßte es der Nullraum sein. Somit hat U als Kern nach der Dimensionsformel die Dimension $3 - 1 = 2$.

Alternative Lösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind zwei linear unabhängige Vektoren aus U; da $U \neq \mathbb{R}^3$ (beispielsweise liegen die Koordinanteneinheitsvektoren nicht in U), kann U nicht dreidimensional sein; also ist $\dim U = 2$.

3) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $x + y + z = 0$ und $x + y = 1$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen!

Lösung: Addition der beiden Gleichungen führt auf $z = 1$. Die zu $x + y = z$ äquivalente erste Gleichung zeigt daß, daß $x \neq y$ sein muß. Die Lösungsmenge besteht daher aus den beiden Tripeln $(1, 0, 1)$ und $(0, 1, 1)$.

4) Finden Sie eine ganze Zahl x, für die $5x \equiv 1 \bmod 2007$ ist!

Lösung: Wir wenden den erweiterten EUKLIDischen Algorithmus an auf 2007 und 5:

$$2007 : 5 = 401 \text{ Rest } 2 \Longrightarrow 2 = 2007 - 401 \cdot 5$$
$$5 : 2 = 2 \text{ Rest } 1 \Longrightarrow 1 = 5 - 2 \cdot 2 = 803 \cdot 5 - 2 \cdot 2007$$

Somit ist $803 \cdot 5 \equiv 1 \bmod 2007$.

5) Was ist $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Lösung: Vertauschen wir die ersten beiden Spalten, ändert sich das Vorzeichen der Determinante und wir erhalten die Determinante einer Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $2, 6, 6, 3, 1$. Somit ist der Wert der gesuchten Determinante $-2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1 = -6^3 = -216$.

6) Berechnen Sie das (Standard-)HERMITEsche Produkt der Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 3i \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{C}^3$!

Lösung: $\begin{pmatrix} i \\ 3i \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} = i \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{i} + 2 \cdot \overline{i} = i + 3 - 2i = 3 - i$.

7) Beschreiben Sie die Niveaulinien $N_a(f)$ der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$ geometrisch!

Lösung: $N_a(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = a\}$ besteht für $a = 0$ aus der x- und der y-Achse, für $a \neq 0$ aus den beiden Zweigen der Hyperbel $xy = a$.

8) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad zehn für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \sin(xy) + \cos(xy)\,!$$

Lösung: Einsetzen von $z = xy$ in die TAYLOR-Reihen

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

liefert das gesuchte TAYLOR-Polynom

$$1 + xy - \frac{(xy)^2}{2} - \frac{(xy)^3}{6} + \frac{(xy)^4}{4!} + \frac{(xy)^5}{5!}\,.$$

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*

V sei der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens fünf, und U sei der von $x, x^2, x^2 + 2x, x^3, x^3 + 3x^2, x^4, x^4 + 4x^3, x^5$ und $x^5 + 5x^4$ erzeugte Untervektorraum.

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von U!

Lösung: Offensichtlich kann jedes Element von V als Linearkombination der x-Potenzen x, x^2, x^3, x^4 und x^5 geschrieben werden. Diese sind natürlich linear unabhängig, denn ist $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5$ für fünf reelle Zahlen $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ das Nullpolynom, so müssen alle fünf Koeffizienten verschwinden. Somit können wir das System $\mathcal{B} = (x, x^2, x^3, x^4, x^5)$ als Basis von V nehmen.

b) Welche Dimension hat U?

Lösung: Da wir eine Basis aus fünf Elementen gefunden haben, ist die Dimension natürlich gleich fünf.

c) Finden Sie eine lineare Abbildung $\psi: V \to \mathbb{R}$, deren Kern gleich U ist!

Lösung: Offensichtlich besteht U genau aus den Polynomen vom Grad höchstens fünf, die keinen konstanten Term haben. Der konstante Term ist aber gerade der Wert des Polynoms an der Stelle Null, also hat $\psi: V \to \mathbb{R}; f \mapsto f(0)$ die verlangte Eigenschaft.

d) Zeigen Sie: Die Vorschrift $\varphi(f) = f'' - f''(0)$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon U \to U$!

Lösung: Da Differentiation und Einsetzen lineare Operationen sind, ist klar, daß φ eine lineare Abbildung von U in den Vektorraum aller Polynome definiert. Wir müssen uns überlegen, daß deren Bild in U liegt. Das folgt beispielsweise aus *c)*, denn $f'' - f''(0)$ verschwindet natürlich an der Stelle Null, und wenn f höchstens Grad fünf hat, kann der von $f'' - f''(0)$ sogar nur höchstens drei sein.

e) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ ?

Lösung: $\varphi(f) = f'' - f''(0)$ verschwindet ghenau dann, wenn $f''(x) = f''(0)$ für alle x, d.h. also, wenn f'' ein konstantes Polynom ist. Da der Grad von f'' im Fall $f'' \neq 0$ um zwei kleiner ist als der von f, ist dies genau dann der Fall, wenn f höchstens Grad zwei hat. Da die Polynome aus U keinen konstanten Term haben, ist der Kern somit zweidimensional; er wird erzeugt beispielsweise von x und x^2.

Nach der Dimensionsformel ist dann $\dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim U - \dim \operatorname{Kern} \varphi = 5 - 2 = 3$.

f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis $\mathcal{B}$!

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Basisdarstellung der Bilder der Basisvektoren; also müssen wir diese ausrechnen:

$$\varphi(x) = \varphi(x^2) = 0, \quad \varphi(x^3) = 6x, \quad \varphi(x^4) = 12x^2 \quad \text{und} \quad \varphi(x^5) = 20x^3\,.$$

Die Abbildungsmatrix ist somit gleich $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 1 && (1)\\ 2w + 3x + y + 3z &= 5 && (2)\\ 3w + 3x + 4y + 2z &= 3 && (3)\\ 4w + 4x + 7y + a^2 z &= 5 + a && (4) \end{aligned}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \dfrac{1}{a-1}$.

Lösung: Zur Elimination von w aus den letzten drei Gleichungen subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten, dreimal von der dritten und viermal von der vierten:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 && (5)\\ y - z &= 0 && (6)\\ 3y + (a^2 - 4)z &= a + 1 && (7) \end{aligned}$$

Da x in den Gleichungen (6) und (7) nicht vorkommt, können wir gleich zur Elimination von y aus Gleichung (7) gehen; dazu subtrahieren wir Gleichung (6) dreimal von (7) und erhalten

$$(a^2 - 1)z = a + 1\,.$$

Für $a = 1$ ist dies die unlösbare Gleichung $0z = 2$, für $a = 1$ ist das Gleichungssystem daher unlösbar. Im folgenden sei stets $a \neq 1$.

Für $a = -1$ haben wir die tautologische Gleichung $0z = 0$, die erfüllt ist wann immer wir für z irgendeine reelle Zahl λ einsetzen. Ansonsten erhalten wir

$$z = \frac{1}{a-1}\,.$$

Nach Gleichung (6) ist in beiden Fällen $y = z$, und nach (5) ist

$$x = 3 + y - z = 3\,.$$

Aus Gleichung (1) schließlich folgern wir, daß

$$w = 1 - x - y - z = -2 - 2z = \begin{cases} -2 - \frac{2}{a-1} = \frac{-2a}{a-1} & \text{fälls } a \neq \pm 1 \\ -2 - \lambda & \text{falls } a = -1 \end{cases}\,.$$

Die Lösungsmenge ist daher

$$\mathcal{L}_a = \left\{\left(\frac{-2a}{a-1},\, 3,\, \frac{1}{a-1},\, \frac{1}{a-1}\right)\right\} \quad \text{für } a \neq \pm 1,$$
$$\mathcal{L}_{-1} = \left\{(-2-2\lambda, 3, \lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_1 = \emptyset\,.$$

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\5\\5\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}6\\4\\12\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-2\\-6\\12\\-4\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums U von $\mathbb{R}^4$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonalbasis dieses Untervektorraums. Als ersten Vektor können wir $\vec{b}_1 = \vec{v}_1$ wählen; wegen

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{1^2 + 5^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{100} = 10$$

ist der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis $\vec{q}_1 = \frac{1}{10}\vec{v}_1$.

Für den zweiten Vektor der Orthogonalbasis machen wir den Ansatz $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + \lambda\vec{b}_1$, wobei λ so gewählt werden muß, daß $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 + \lambda\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$ ist. Da

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 6 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 12 + 7 \cdot 2 = 100$$

gleich dem Quadrat der Länge von $\vec{v}_1$ ist, folgt $\lambda = -1$ und $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}5\\-1\\7\\-5\end{pmatrix}$.

Auch dieser Vektor hat die Länge zehn, der zugehörige Vektor der Orthonormalbasis ist also $\vec{q}_2 = \frac{1}{10}\vec{b}_2$.

Für den noch fehlenden dritten Vektor der Orthogonalbasis ist der Ansatz entsprechend:

$$\vec{b}_3 = \vec{v}_3 + \lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2 \quad \text{mit} \quad \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = 0\,.$$
$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_3 \cdot \vec{b}_1 + \lambda\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = (-2 - 30 + 60 - 28) + 100\lambda \Longrightarrow \lambda = 0$$
$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{b}_2 + \mu\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = (-10 + 6 + 84 + 20) + 100\mu \Longrightarrow \mu = -1$$
$$\vec{b}_3 = \vec{v}_3 - \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}-7\\-5\\5\\1\end{pmatrix}\,.$$

Auch dieser Vektor hat die Länge zehn; als Orthonormalbasis können wir also die drei Vektoren $\vec{q}_1 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\5\\5\\7\end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}5\\-1\\7\\-5\end{pmatrix}$ und $\vec{q}_3 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-7\\-5\\5\\1\end{pmatrix}$ nehmen.

b) Bestimmen Sie die orthogonalen Projektionen von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$ nach U und nach $U^\perp$!

Lösung: Ist $\vec{q}_4$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^4$, der zusammen mit $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ und $\vec{q}_3$ eine Orthonormalbasis bildet, so läßt sich jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ schreiben als

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{q}_1)\vec{q}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{q}_2)\vec{q}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{q}_3)\vec{q}_3 + (\vec{v} \cdot \vec{q}_4)\vec{q}_4 \,;$$

seine orthogonale Projektion nach U ist die Summe der ersten drei Summanden der rechten Seite, die nach $U^\perp$ ist der letzte Summand. Die Projektion auf U ist somit

$$\pi_U(\vec{a}) = \frac{20 \cdot 7}{10}\vec{q}_1 - \frac{20 \cdot 5}{10}\vec{q}_2 + \frac{20 \cdot 1}{10}\vec{q}_3 = \frac{14}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{10}{10}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{10}\begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix},$$

und die nach $U^\perp$ ist

$$\pi_{U^\perp}(\vec{a}) = \vec{a} - \pi_U(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

c) Ergänzen Sie die in *a)* gefundene Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$. *(Hinweis: Sie können z.B. b) verwenden.)*

Lösung: Die orthogonale Projektion von $\vec{a}$ nach $U^\perp$ steht natürlich senkrecht auf U, also insbesondere auf $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ und $\vec{q}_3$. Seine Länge ist wieder zehn; daher können als vierten Vektor der Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ den Vektor $\vec{q}_4 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ nehmen.

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)
Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Lösung: Offensichtlich genau für die, für die die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{vmatrix}$ nicht verschwindet. Diese kann durch Entwicklung nach irgendeiner Zeile oder Spalte berechnet werden, beispielsweise nach der ersten Spalte:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - a^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = (1 - a^2)\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = (1 - a^2)^2,$$

wobei die 3×3-Determinanten durch Entwickeln nach der zweiten *bzw.* ersten Zeile berechnet wurden. Somit sind die vier Vektoren genau dann linear unabhängig, wenn $a \neq \pm 1$ ist.

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Die Eigenwerte sind die Nullstellen von

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} .$$

Zur Berechnung dieser Determinante entwickeln wir natürlich nach der zweiten Zeile; wir erhalten

$$(-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)\big((1-\lambda)^2 - 4\big) .$$

Dies verschwindet genau dann, wenn $\lambda = -1$ ist oder

$$(1-\lambda)^2 = 4 \iff \lambda = 1 \pm \sqrt{4} = -1 \text{ oder } 3 .$$

Die Eigenwerte sind somit -1 und 3.
Die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ erfüllen das lineare Gleichungssystem

$$(A+E)\vec{v} = \vec{0} \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dieses ist äquivalent zu der einen Gleichung $x + y + z = 0$; eine Basis des Lösungsraums bilden also beispielsweise die beiden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 3$ erfüllen das lineare Gleichungssystem

$$(A-3E)\vec{v} = \vec{0} \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ausgeschrieben wird das zu

$$-2x + 2y + 2z = 0, \qquad -4y = 0 \quad \text{und} \quad 2x + 2y - 2z = 0 .$$

Nach der zweiten Gleichung ist $y = 0$; setzt man dies in die beiden anderen ein, folgt jeweils, daß $x = z$ sein muß. Der Eigenraum wird also erzeugt von $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat?

Lösung: Ja, z.B. $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Diese Vektoren sind linear unabhängig, denn ist

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \nu \\ -\lambda + \mu \\ -\mu + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

so ist einerseits $\nu = -\lambda$ und $\mu = \lambda$, andererseits ist $\mu = \nu$, also müssen alle drei verschwinden.

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)
$\vec{V} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei ein Vektorfeld und $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sei eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Die JACOBI-Matrix $J_{f\vec{V}}$ von $f\vec{V}$ ist $fJ_{\vec{V}} + \vec{V} \otimes \operatorname{grad} f$, wobei $\vec{v} \otimes \vec{w}$ für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ jene $n \times n$-Matrix bezeichnet, deren ij-Eintrag gleich dem Produkt $v_i w_j$ aus der i-ten Komponente von $\vec{v}$ und der j-ten Komponente von $\vec{w}$ ist.

Lösung: Sind $V_1, \dots, V_n$ die Komponenten von $\vec{V}$, so ist der ij-Eintrag der JACOBI-Matrix von $f\vec{V}$ gleich

$$\frac{\partial(fV_i)}{\partial x_j} = f\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} V_i \,.$$

Genau das ist offensichtlich auch der ij-Eintrag von $fJ_{\vec{V}} + \vec{V} \otimes \operatorname{grad} f$.

Aufgabe 7: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie für die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y) + x + y^2 \end{cases}$ Gradient und HESSE-Matrix!

Lösung: Die Funktion ist offensichtlich mindestens zweimal stetig differenzierbar (sie ist sogar analytisch); es reicht also, die partiellen Ableitungen zu berechnen. Für den Gradienten bekommen wir

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \cos(x^2 + y) \cdot 2x + 1 \\ f_y(x, y) &= \cos(x^2 + y) + 2y \\ \nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2 + y) + 1 \\ \cos(x^2 + y) + 2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die HESSE-Matrix können wir aus dem SCHWARZschen Lemma folgern, daß $f_{xy} = f_{yx}$ ist, wir müssen also nur eine der beiden gemischten Ableitungen berechnen.

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 2\cos(x^2 + y) - 4x^2 \sin(x^2 + y) \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -2x\sin(x^2 + y) \\ f_{yy}(x, y) &= -\sin(x^2 + y) + 2 \end{aligned}$$

Damit ist $H_f(x, y)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2\cos(x^2 + y) - 4x^2\sin(x^2 + y) & -2x\sin(x^2 + y) \\ -2x\sin(x^2 + y) & -\sin(x^2 + y) + 2 \end{pmatrix} .$$