WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

2. Juni 2007

Scheinklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Im Vektorraum V aller reeller Polynome vom Grad höchstens fünf ist die Teilmenge $U = \{f \in V \mid f(0) \geq 0\}$ ein Untervektorraum.

2) Welche Dimension hat der Vektorraum $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$?

3) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $x + y + z = 0$ und $x + y = 1$ über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen!

4) Finden Sie eine ganze Zahl x, für die $5x \equiv 1 \bmod 2007$ ist!

5) Was ist $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

6) Berechnen Sie das (Standard-)HERMITEsche Produkt der Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 3i \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{C}^3$!

7) Beschreiben Sie die Niveaulinien $N_a(f)$ der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$ geometrisch!

8) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad zehn für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto \sin(xy) + \cos(xy)\,!$$

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
V sei der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens fünf, und U sei der von $x, x^2, x^2 + 2x, x^3, x^3 + 3x^2, x^4, x^4 + 4x^3, x^5$ und $x^5 + 5x^4$ erzeugte Untervektorraum.

a) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von U!

b) Welche Dimension hat U?

c) Finden Sie eine lineare Abbildung $\psi\colon V \to \mathbb{R}$, deren Kern gleich U ist!

d) Zeigen Sie: Die Vorschrift $\varphi(f) = f'' - f''(0)$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon U \to U$!

e) Welche Dimensionen haben Kern und Bild von φ ?

f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der in *a)* gefundenen Basis $\mathcal{B}$!

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 1 && (1)\\ 2w + 3x + y + 3z &= 5 && (2)\\ 3w + 3x + 4y + 2z &= 3 && (3)\\ 4w + 4x + 7y + a^2 z &= 5 + a && (4) \end{aligned}$$

Hinweis **nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler:* Für viele Werte von a ist $z = \frac{1}{a-1}$.

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\5\\5\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}6\\4\\12\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-2\\-6\\12\\-4\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums U von $\mathbb{R}^4$!

b) Bestimmen Sie die orthogonalen Projektionen von $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\20\end{pmatrix}$ nach U und nach $U^\perp$!

c) Ergänzen Sie die in *a)* gefundene Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$. *(Hinweis: Sie können z.B. b) verwenden.)*

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)
Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\a\\0\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$!

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat?

Aufgabe 6: (*4 Punkte*)
$\vec{V} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei ein Vektorfeld und $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sei eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Die Jacobi-Matrix $J_{f\vec{V}}$ von $f\vec{V}$ ist $fJ_{\vec{V}} + \vec{V} \otimes \operatorname{grad} f$, wobei $\vec{v} \otimes \vec{w}$ für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ jene $n \times n$-Matrix bezeichnet, deren ij-Eintrag gleich dem Produkt $v_i w_j$ aus der i-ten Komponente von $\vec{v}$ und der j-ten Komponente von $\vec{w}$ ist.

Aufgabe 7: (*5 Punkte*)
Berechnen Sie für die Funktion $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin(x^2 + y) + x + y^2 \end{cases}$ Gradient und Hesse-Matrix!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 2. Juni 2007, um 13^{00} Uhr