Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. Juni 2007

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ hänge, in Polarkoordinaten (r, φ) geschrieben, nur ab von φ. Wie sehen die Niveaulinien von f aus?

Lösung: Es sind Vereinigungen von Strahlen, die allesamt vom Nullpunkt ausgehen, diesen aber nicht enthalten.

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ hänge, in Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) geschrieben, nur ab von ϑ. Wie sehen die Niveauflächen von f aus?

Lösung: Es sind Vereinigungen von Kegeln mit dem Nullpunkt als (nicht darin enthaltener) Spitze.

c) Das Vektorfeld $\vec{V}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ordne dem Punkt mit Polarkoordinaten (r, φ) den Vektor $\binom{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ aus $\mathbb{R}^2$ zu. Zeigen Sie, daß dieser Vektor in jedem Punkt (x, y) senkrecht auf dem Ortsvektor $\binom{x}{y}$ steht!

Lösung: In Polarkoordinaten ist $\binom{x}{y} = \binom{r\cos\varphi}{r\sin\varphi}$, und dieser Vektor hat in der Tat Skalarprodukt null mit $\binom{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

d) Bestimmen Sie durch Übergang zu Polarkoordinaten alle relativen Extrema der Funktion $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) + \sin(x^2 + y^2)$!

Lösung: In Polarkoordinaten haben wir die Funktion

$$\begin{aligned} F(r, \varphi) &= f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \cos\bigl(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\bigr) + \sin\bigl(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\bigr) \\ &= \cos\bigl(r^2\bigr) + \sin\bigl(r^2\bigr) . \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = \cos x + \sin x$ hat Ableitung $-\sin x + \cos x$; dies verschwindet in allen Punkten x, für die $\sin x = \cos x$ ist, d.h. $\tan x = 1$ oder $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ für $k \in \mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist das eine positive Zahl; die relativen Extrema von f liegen also auf den Kreisen

$$r = \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}} \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$.

e) Berechnen Sie $\Delta\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n}$, $\quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ für beliebiges $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ via Kugelkoordinaten, und zeigen Sie, daß dies genau für $n = \frac{1}{2}$ verschwindet!

Lösung: In Kugelkoordinaten ausgedrückt haben wir die Funktion $F(r, \varphi, \vartheta) = 1/r^{2n}$. Auf Grund der Formel

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \\ &= F_{rr} + \frac{2F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{F_{\vartheta\vartheta}}{r^2} + \frac{F_\vartheta}{r^2\tan\vartheta} \end{aligned}$$

ist daher

$$\Delta\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^n} = \frac{-2n(-2n-1)}{r^{2n+2}} - \frac{2\cdot 2n}{r\cdot r^{2n+1}} = \frac{4n^2-2n}{r^{2n+2}} = \frac{2n(2n-1)}{r^{2n+2}} .$$

Dies verschwindet im positiven Bereich in der Tat genau für $n = \frac{1}{2}$.

f) Beschreiben Sie den Graphen der Betragsfunktion zwischen $x = -3$ und $x = 3$ durch ein Kurvenstück oder durch eine Kurve!

Lösung: Da der Graph im Nullpunkt einen Knick hat, geht das nicht mit nur einem Kurvenstück; wir brauchen zwei. Eine Möglichkeit ist etwa

$$\gamma_1\colon \begin{cases} [-3,\, 0] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (t, -t) \end{cases} \quad \text{und} \quad \gamma_2\colon \begin{cases} [0,\, 3] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (t, \quad t) \end{cases} .$$

g) Richtig oder falsch: Ein konservatives Vektorfeld ist quellenfrei.

Lösung: *Falsch;* ist etwa $\vec{V}(x,y,z) = \operatorname{grad}\varphi(x,y,z)$ mit $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, so ist $\operatorname{div}\vec{V}(x,y,z) = \Delta\varphi(x,y,z) - 6$.

h) Richtig oder falsch: Falls für zwei Vektorfelder $\vec{V}$ und $\vec{W}$ auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Kurve γ in U gilt $\int_\gamma \vec{V}\cdot d\vec{x} = \int_\gamma \vec{W}\cdot d\vec{x}$, so ist $\vec{V}(x) = \vec{W}(x)$ für alle Kurvenpunkte $x = \gamma(t)$.

Lösung: *Falsch;* ist etwa γ eine geschlossene Kurve, so verschwindet das Integral für jedes beliebige konservative Vektorfeld. Da mit $\vec{V}$ auch jedes Vielfache von $\vec{V}$ konservativ ist, führt allein dies zu zahlreichen Gegenbeispielen.

i) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y/(x^2+y^2)}{-x/(x^2+y^2)}$ hat eine Stammfunktion.

Lösung: *Falsch,* denn die Ableitung der ersten Komponente nach y ist $2xy/(x^2+y^2)^2$, die der zweiten nach x aber das negative davon. (Falls es eine Stammfunktion F gäbe, müßte beides gleich F_{xy} sein.)

j) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y^2}{x^2}$ längs des Dreiecks mit Ecken $(1,0)$, $(1,1)$ und $(0,0)$!

Lösung: Zunächst müssen wir die drei Seiten des Dreiecks Δ als Kurvenstücke darstellen und die Tangentenvektoren dieser Kurvenstücke bestimmen:

$$\gamma_1\colon \begin{cases} [0,\, 1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (1, t) \end{cases} \quad \text{führt von } (1,0) \text{ nach } (1,1)\,, \qquad \dot\gamma_1(t) = \tbinom{0}{1}$$

$$\gamma_2\colon \begin{cases} [0,\, 1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (1-t, 1-t) \end{cases} \quad \text{führt von } (1,1) \text{ nach } (0,0)\,, \qquad \dot\gamma_2(t) = \tbinom{-1}{-1}$$

$$\gamma_3\colon \begin{cases} [0,\, 1] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (t, 0) \end{cases} \quad \text{führt von } (0,0) \text{ nach } (1,0)\,, \qquad \dot\gamma_3(t) = \tbinom{1}{0}$$

Damit ist

$$\int_{\gamma_1} V(x,y)\,ds = \int_0^1 V\big(\gamma_1(t)\big)\dot\gamma_1(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 dt = 1\,,$$

$$\int_{\gamma_2} V(x,y)\,ds = \int_0^1 V\big(\gamma_2(t)\big)\dot\gamma_2(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 \\ (1-t)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = -2\int_0^1 (1-t)^2\,dt = \frac{2}{3}(1-t)^3\,\bigg|_0^1 = -\frac{2}{3}\,,$$

$$\int_{\gamma_3} V(x,y)\,ds = \int_0^3 V\big(\gamma_3(t)\big)\dot\gamma_3(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 0\,dt = 0\,,$$

und

$$\int_\Delta V(x,y)\,ds = \int_{\gamma_1} V(x,y)\,ds + \int_{\gamma_2} V(x,y)\,ds + \int_{\gamma_3} V(x,y)\,ds = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

k) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{W}(x,y) = \binom{x^2y}{xy^2}$ längs der beiden Teilbögen des Einheitskreises, die den Punkt $(1,0)$ mit $(0,1)$ verbinden!

Lösung: Die übliche Parametrisierung $\gamma(t) = (\cos t,\ \sin t)$ des Einheitskreises durchläuft diesen im mathematisch positiven Sinn, dem Gegenuhrzeigersinn also; um vom Punkt $(1,0)$ zu $(0,1)$ zu kommen, müssen wir das Parameterintervall von 0 bis $\pi/2$ betrachten. Somit ist

$$\int_\gamma \vec{W}(x,y)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{W}(\cos t, \sin t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos^2 t \sin t \\ \cos t \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^2 t)\,dt = 0\,.$$

Für den Uhrzeigersinn:

Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen können wir den Kreisbogen im Uhrzeigersinn durchlaufen, indem wir einfach den Parameter t durch $-t$ ersetzen; wir betrachten also das Kurvenstück

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit Tangentenvektor} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

Der Punkt $(1,0)$ gehört zum Parameterwert null, und für $t = 3\pi/2$ erhalten wir den Punkt $(0,1)$; daher ist

$$\int_\gamma \vec{W}(x,y)\,ds = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \vec{W}(\cos t, -\sin t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \begin{pmatrix} -\cos^2 t \sin t \\ \cos t \sin^2 t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t \sin^2 t - \cos^2 t \sin^2 t)\,dt = 0\,.$$

l) Ist eines der Vektorfelder $\vec{V}$ oder $\vec{W}$ konservativ?

Lösung: $\vec{V}$ ist nicht konservativ, da das Integral längs des (geschlossenen) Dreiecks Δ nicht verschwindet.

Für $\vec{W}$ haben die beiden Integrale aus den vorigen Aufgaben denselben Wert, $\vec{W}$ ist aber trotzdem nicht konservativ, denn gäbe es eine Stammfunktion Φ, so wären $\Phi_x = x^2y$ und $\Phi_y = xy^2$ die beiden Komponenten von $\vec{W}$; da diese stetig differenzierbar sind, müßte nach dem Lemma von SCHWARZ

$$x^2 = \frac{\partial}{\partial y}\Phi_x = \frac{\partial}{\partial x}\Phi_y = y^2$$

sein, was offensichtlich für die meisten Punkte falsch ist.

m) Das Kurvenstück γ sei gegeben durch $\gamma\colon \begin{cases} [0, 100\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (2\cos 2t,\ 2\sin 2t,\ 3t) \end{cases}$.

Beschreiben Sie dieses Kurvenstück geometrisch und berechnen Sie seine Bogenlänge!

Lösung: Es handelt sich um eine zylindrische Spirale vom Radius zwei, die hundert Windungen hat und eine Höhe von 300π.

Der Tangentenvektor an γ im Punkt $\gamma(t)$ ist $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -4\sin 2t \\ 4\cos 2t \\ 3 \end{pmatrix}$; sein Skalarprodukt mit sich selbst ist

$$\dot\gamma(t)\cdot\dot\gamma(t) = 16\sin^2 2t + 16\cos^2 2t + 9 = 16 + 9 = 25\,,$$

er hat also in jedem Punkt die Länge fünf. Die Gesamtlänge der Spirale ist somit

$$\int_0^{100\pi} 5\,dt = 500\pi\,.$$

n) Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = \cosh x$ über dem Intervall $[-c, c]$!

Lösung: In Parameterdarstellung können wir diese Kurve beispielsweise beschreiben durch

$$\gamma\colon \begin{cases} [-c, c] \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \mapsto (t, \cosh t) \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Bogenlänge gleich

$$\int_{-c}^{c} \sqrt{1 + \sinh^2 t}\,dt = \int_{-c}^{c} \sqrt{\cosh^2 t}\,dt = \int_{-c}^{c} \cosh t\,dt = \sinh c - \sinh(-c) = 2\sinh c\,.$$