

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 4. Juni 2007

- a) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ hänge, in Polarkoordinaten (r, φ) geschrieben, nur ab von φ . Wie sehen die Niveaulinien von f aus?
- b) Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ hänge, in Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) geschrieben, nur ab von ϑ . Wie sehen die Niveauflächen von f aus?
- c) Das Vektorfeld \vec{V} auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ordne dem Punkt mit Polarkoordinaten (r, φ) den Vektor $\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$ aus \mathbb{R}^2 zu. Zeigen Sie, daß dieser Vektor in jedem Punkt (x, y) senkrecht auf dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ steht!
- d) Bestimmen Sie durch Übergang zu Polarkoordinaten alle relativen Extrema der Funktion $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) + \sin(x^2 + y^2)$!
- e) Berechnen Sie $\Delta \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^n}$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ für beliebiges $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ via Kugelkoordinaten, und zeigen Sie, daß dies genau für $n = \frac{1}{2}$ verschwindet!
- f) Beschreiben Sie den Graphen der Betragsfunktion zwischen $x = -3$ und $x = 3$ durch ein Kurvenstück oder durch eine Kurve!
- g) *Richtig oder falsch:* Ein konservatives Vektorfeld ist quellenfrei.
- h) *Richtig oder falsch:* Falls für zwei Vektorfelder \vec{V} und \vec{W} auf $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Kurve γ in U gilt $\int_\gamma \vec{V} \cdot d\vec{x} = \int_\gamma \vec{W} \cdot d\vec{x}$, so ist $\vec{V}(x) = \vec{W}(x)$ für alle Kurvenpunkte $x = \gamma(t)$.
- i) *Richtig oder falsch:* Das Vektorfeld $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y/(x^2 + y^2) \\ -x/(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$ hat eine Stammfunktion.
- j) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$ längs des Dreiecks mit Ecken $(1, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 0)$!
- k) Integrieren Sie das Vektorfeld $\vec{W}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x y^2 \end{pmatrix}$ längs der beiden Teilbögen des Einheitskreises, die den Punkt $(1, 0)$ mit $(0, 1)$ verbinden!
- l) Ist eines der Vektorfelder $\vec{F}, \vec{V}, \vec{W}$ konservativ?
- m) Das Kurvenstück γ sei gegeben durch $\gamma: \begin{cases} [0, 100\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto (2 \cos 2t, 2 \sin 2t, 3t) \end{cases}$.

Beschreiben Sie dieses Kurvenstück geometrisch und berechnen Sie seine Bogenlänge!

- n) Berechnen Sie die Länge der Kurve $y = \cosh x$ über dem Intervall $[-c, c]$!