Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 14. Mai 2007

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums $x + 2y + 5z = 0$ des $\mathbb{R}^3$ mit seinem Standardskalarprodukt.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die den Vektor $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ enthält!

c) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+3i \\ 6+i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{C}^3$ mit seinem üblichen Hermiteschen Skalarprodukt!

d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von 1 und e^x aufgespannten Untervektorraums von $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$!

e) Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$!

f) Richtig oder falsch: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, so ist $iA \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär.

g) Richtig oder falsch: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, so auch iA.

h) Für welche Wahl der Vorzeichen sind die folgenden Matrizen orthogonal *bzw.* unitär?

$$A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & \pm 4 \\ 4 & \pm 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ 1 & \pm i \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & \pm 1 \\ 1 & \pm i \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & -1 & 1 \\ -1 & \pm 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pm 1 & 1 & 1 \\ -1 & \pm 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die nächsten Themenvorschläge sei V ein Euklidischer oder Hermitescher Vektorraum, $U \le V$ ein Untervektorraum und $\pi_U\colon V \to U$ die orthogonale Projektion auf U.

i) Richtig oder falsch: $\pi_U(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} \in U^\perp$

j) Richtig oder falsch: $|\vec{v} \cdot \vec{u}| \le |\vec{v} \cdot \pi_U(\vec{v})|$ für alle $\vec{u} \in U, \vec{v} \in V$

k) Richtig oder falsch: $|\pi_U(\vec{v})| \le |\vec{v}|$ für alle $\vec{v} \in V$

l) Was ist $\pi_U(\vec{v}) + \pi_{U^\perp}(\vec{v})$?

m) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ auf $U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$!

n) Zeigen Sie, daß das folgende lineare Gleichungssystem unlösbar ist:

$$x + y = 1, \quad x + 2y = 2 \quad \text{und} \quad 2x + 3y = 4 \qquad (*)$$

o) Finden Sie reelle Zahlen x, y, so daß $(*)$ mit diesen Zahlen im Sinne der kleinsten Quadrate möglichst wenig falsch ist!
Variante I: Verwenden Sie den vorletzten Themenvorschlag!
Variante II: Verwenden Sie die allgemeine Theorie aus der Vorlesung!