Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 7. Mai 2007

a) Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix} \quad !$$

Lösung: Offensichtlich handelt es sich hier um die Vandermondesche Determinante für $1, 2, 3, 4, 5$; ihr Wert ist also

$$(5-4)(5-3)(5-2)(5-1)(4-3)(4-2)(4-1)(3-2)(3-1)(2-1) = 4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1! = 24\cdot 6\cdot 2 = 288\,.$$

b) Unter welchen Bedingungen an a, b, c, d, e läßt sich das lineare Gleichungssystem

$$x + ay + a^2z = 1\,; \qquad x + by + b^2z = d; \qquad x + by + b^2z = e$$

nach der Cramerschen Regel lösen?

Lösung: Genau dann, wenn die Determinante der Matrix des Gleichungssystems nicht verschindet. Diese Determinante ist die Vandermondesche Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)\,;$$

somit liefert die Cramersche Regel genau dann eine Lösung, wenn a, b, c drei verschiedene Zahlen sind. Auf die rechten Seiten kommt es nicht an, denn wenn die Determinante der Matrix ungleich null ist, gibt es für *jede* rechte Seite genau eine Lösung.

c) Bestimmen Sie diese Lösung für $d = e = 1$!

Lösung: Nach der Cramerschen Regel ist für $a \neq b \neq c \neq a$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = 0 \quad \text{und} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = 0\,,$$

da in diesen beiden letzten Fällen die Matrix im Zähler zwei gleiche Spalten enthält.

Bemerkung: $x = 1$ und $y = z = 0$ ist zwar unabhängig von a, b, c stets eine Lösung, aber wenn die Determinante des Gleichungssystems verschwindet, bekommen wir diese erstens nicht über die Cramersche Regel, und zweitens *muß* es in diesen Fällen auch noch weitere Lösungen geben.

d) *Ditto* für $d = e = 0$!

Lösung: Hier erhalten wir für $a \neq b \neq c \neq a$ die Formeln

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b & b^2 \\ 0 & c & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b & b^2 \\ c & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{bc^2 - cb^2}{(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{bc}{(c-a)(b-a)},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 0 & b^2 \\ 1 & 0 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & b^2 \\ 1 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = -\frac{c^2 - b^2}{(c-b)(c-a)(b-a)} = -\frac{b+c}{(c-a)(b-a)},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{c-b}{(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{1}{(c-a)(b-a)}.$$

e) Zeigen Sie: Eine $n \times n$-Matrix A mit ganzzahligen Einträgen hat genau dann eine inverse Matrix mit ganzzahligen Einträgen, wenn $\det A = \pm 1$ ist.

Lösung: Falls A und A^{-1} nur ganzzahlige Einträge haben, sind $\det A$ und $\det A^{-1}$ ganze Zahlen und $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Dies ist nur möglich, falls $\det A = \det A^{-1} = \pm 1$ ist.

Umgekehrt sei $\det A = \pm 1$ und alle Einträge von A ganzzahlig. Der i-te Spaltenvektor von A ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{e}_i$, wobei $\vec{e}_i$ der i-te Einheitsvektor ist. Nach der CRAMERschen Regel ist berechnen sich die Komponenten von $\vec{x}$ als Quotienten zweier Determinanten, wobei im Nenner $\det A = \pm 1$ steht und im Zähler die Determinante einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen, also eine ganze Zahl. Somit sind alle Lösungen ganzzahlig und mithin auch alle Einträge von A^{-1}.

f) Für die Vektorräume $\mathbb{F}_2^n$ sei eine Bilinearform $\mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n$ definiert durch die übliche Formel $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$. Welche Vektoren aus $\mathbb{F}_2^n$ haben dann Produkt Null mit sich selbst?

Lösung: $\vec{v} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i$, da jedes der beiden Elemente von $\mathbb{F}_2$ sein eigenes Quadrat ist. Lösungen sind also die Vektoren mit einer geraden Anzahl von Einsen unter ihren Komponenten.

g) $\mathbb{C}^2$ sei mit seinem Standard HERMITEschen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}!$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} &= 1\cdot\bar{i}+i\cdot\bar{1} = -i+i = 0\\
\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &= i\cdot\bar{1}+i\cdot\bar{1} = 2i\\
\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix} &= \overline{\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = -2i \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\i\end{pmatrix} = \bar{i}+\bar{i} = -2i
\end{aligned}$$

h) Richtig oder falsch: $\mathbb{R}^2$ mit dem Produkt $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix} = v_1w_2 - v_2w_1$ ist ein EUKLIDischer Vektorraum.

Lösung: *Falsch,* denn das Produkt ist nicht symmetrisch.

i) Was ändert sich, wenn man stattdessen $|\vec{v}\odot\vec{w}|$ als Produkt nimmt?

Lösung: Jetzt ist es zwar symmetrisch, aber nicht mehr linear.

j) Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix} = \begin{cases}(v_1+2v_2)(w_1+2w_2)+4v_3w_3 & (1)\\ (v_1+2v_2)(w_1+2w_2)-4v_3w_3 & (2)\\ v_1w_2+v_2w_3+v_3w_1 & (3)\\ v_1w_1+2v_2w_2+3v_3w_3+v_2(w_1+w_3)+(v_1+v_3)w_2 & (4)\end{cases}$$

Lösung: Die Bilinearität ist in allen Fällen trivial, symmetrisch sind (1), (2) und (4). Positive Semidefinitheit ist klar bei (1), aber das Produkt ist nicht definit, da z.B.

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = 0$$

ist. (2) ist nicht einmal positiv semidefinit, denn

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = (1+2)^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = -7\,.$$

Was (4) betrifft, so ist

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = v_1^2+2v_2^2+3v_3^2+2v_2(v_1+v_3)\,.$$

Quadratische Ergänzung macht daraus

$$(v_1+v_2)^2+(v_2+v_3)^2+2v_3^2\,,$$

was nie negativ sein kann. Der Ausdruck verschwindet genau dann, wenn alle drei Quadrate verschwinden, d.h.

$$v_1 = -v_2, \quad v_2 = -v_3 \quad \text{und} \quad v_3 = 0\,.$$

Das ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn alle Komponenten v_i verschwinden. Damit definiert (4) und nur (4) ein Skalarprodukt.

k) *Richtig oder falsch:* Die LORENTZ-Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - c^2t_1t_2$ macht $\mathbb{R}^4$ zum EUKLIDischen Vektorraum.

Lösung: *Falsch,* denn sie ist offensichtlich nicht positiv definit. (Aber trotzdem nützlich!)

l) *Richtig oder falsch:* $\binom{a}{b} \odot \binom{c}{d} = a\bar{c} + \bar{b}d$ definiert ein HERMITEches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$.

Lösung: *Falsch,* es ist nicht linear im ersten Argument: $\left(i\binom{1}{i}\right) \odot \binom{1}{1} = \binom{i}{-1} \odot \binom{1}{1} = i-1$, aber $i\left(\binom{1}{i} \odot \binom{1}{1}\right) = i(1-i) = i+1$.

m) Drücken Sie für ein HERMITEsches Skalarprodukt das Produkt $(i\vec{v}) \cdot (i\vec{w})$ aus durch $\vec{v} \cdot \vec{w}$!

Lösung: $(i\vec{v}) \cdot (i\vec{w}) = i\big(\vec{v} \cdot (i\vec{w})\big) = i\bar{i}\big(\vec{v} \cdot \vec{w}\big) = \vec{v} \cdot \vec{w}$.

n) Gibt es ein HERMITEsches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, das nur reelle Werte annimmt?

Lösung: Natürlich nicht; wegen der Linearität im ersten Argument kann jedes HERMITEsche Skalarprodukt jede komplexe Zahl als Wert annehmen.