

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 7. Mai 2007

a) Berechnen Sie die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix} !$$

b) Unter welchen Bedingungen an  $a, b, c, d, e$  läßt sich das lineare Gleichungssystem

$$x + ay + a^2z = 1; \quad x + by + b^2z = d; \quad x + cy + c^2z = e$$

nach der CRAMERSchen Regel lösen?

c) Bestimmen Sie diese Lösung für  $d = e = 1$ !

d) *Ditto* für  $d = e = 0$ !

e) Zeigen Sie: Eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit ganzzahligen Einträgen hat genau dann eine inverse Matrix mit ganzzahligen Einträgen, wenn  $\det A = \pm 1$  ist.

f) Für die Vektorräume  $\mathbb{F}_2^n$  sei eine Bilinearform  $\mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n$  definiert durch die übliche Formel  $\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n v_i w_i$ . Welche Vektoren aus  $\mathbb{F}_2^n$  haben dann Produkt Null mit sich selbst?

g)  $\mathbb{C}^2$  sei mit seinem Standard HERMITESchen Produkt ausgestattet. Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} !$$

h) *Richtig oder falsch:*  $\mathbb{R}^2$  mit dem Produkt  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1$  ist ein EUKLIDIScher Vektorraum.

i) Was ändert sich, wenn man stattdessen  $|\vec{v} \odot \vec{w}|$  als Produkt nimmt?

j) Welche der folgenden vier Vorschriften definiert ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^3$ ?

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) + 4v_3 w_3 & (1) \\ (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) - 4v_3 w_3 & (2) \\ v_1 w_2 + v_2 w_3 + v_3 w_1 & (3) \\ v_1 w_1 + 2v_2 w_2 + 3v_3 w_3 + v_2(w_1 + w_3) + (v_1 + v_3)w_2 & (4) \end{cases}$$

k) *Richtig oder falsch:* Die LORENTZ-Form  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - c^2 t_1 t_2$  macht  $\mathbb{R}^4$  zum EUKLIDISchen Vektorraum.

l) *Richtig oder falsch:*  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = a\bar{c} + \bar{b}d$  definiert ein HERMITESches Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^2$ .

m) Drücken Sie für ein HERMITESches Skalarprodukt das Produkt  $(i\vec{v}) \cdot (i\vec{w})$  aus durch  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ !

n) Gibt es ein HERMITESches Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^n$ , das nur reelle Werte annimmt?