

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 30. April 2007

- a) Schreiben Sie $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ als Produkt von Transpositionen!
- b) Schreiben Sie π^{-1} als Produkt von Transpositionen!
- c) Ist π gerade oder ungerade?
- d) *Richtig oder falsch:* π^{-1} ist genau dann gerade, wenn π gerade ist.
- e) A_π sei die Permutationsmatrix zu $\pi \in \mathfrak{S}_n$, d.h. $a_{ij} = 1$, falls $j = \pi(i)$ und null sonst. Was ist $\det A_\pi$?
- f) Zeigen Sie: Jede Permutation π der Form $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$, die drei Zahlen zyklisch vertauscht, ist gerade.
- g) Bestimmen Sie, ohne zu rechnen, den *Betrag* der Determinanten

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} !$$

- h) Berechnen Sie die Determinanten

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 15 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} !$$

- i) Welche Gleichung muß x erfüllen, damit die vier Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 2 \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind?

- j) *Richtig oder falsch:* Falls die ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Determinante ± 1 hat, sind a und d teilerfremd zu b und c .
- k) *Richtig oder falsch:* Falls die ganzzahlige Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine ganzzahlige Matrix als Inverse hat, ist ihre Determinante gleich ± 1 .
- l) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} !$
- m) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} !$
- n) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} !$
- o) Zeigen Sie, daß \mathbb{R}^3 eine Basis aus Eigenvektoren von A hat!
- p) Wie sieht die Matrix A bezüglich dieser Basis aus?