Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515

A5, Zimmer C201

## Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. April 2007

*a)* $M$ sei die $n \times m$-Matrix, deren sämtliche Einträge gleich Eins sind; $D \in k^{n\times n}, D' \in k^{m\times m}$ seien Diagonalmatrizen mit Einträgen $d_1, \ldots, d_n$ *bzw.* $e_1, \ldots, e_m$. Was ist $DMD'$ ?

**Lösung:** Multipliziert man von links mit einer Diagonalmatrix, werden die Zeilen mit den Diagonaleinträgen multipliziert; die Matrix $DM$ hat also in ihrer $i$-ten Zeile lauter Einträge $d_i$. Multipliziert man von rechts mit einer Diagonalmatrix, werden die *Spalten* mit den Diagonaleinträgen multipliziert; angewandt auf $DM$ heißt das, daß der $(i,j)$-Eintrag von $DMD'$ gleich $d_i e_j$ ist.

*b)* Welchen Rang hat $DMD'$ ?

**Lösung:** Höchstens eins, denn offensichtlich hat $M$ den Rang eins, und die Multiplikation mit einer weiteren Matrix kann den Rang nicht vergrößern: Der Rang einer Matrix ist die Dimension des Bilds der dazugehörigen linearen Abbildung, und das Bild einer zusammengesetzten Abbildung kann keine größere Dimension haben als das einer jeden Teilabbildung. Falls $D$ oder $D'$ die Nullmatrix sind, so auch $DMD'$; in diesem Fall ist der Rang also gleich null. Ansonsten hat $DMD'$ mindestens einen von Null verschiedenen Eintrag und damit Rang eins.

*c)* *Richtig oder falsch:* $E_{ij}E_{j\ell} = E_{i\ell}$ für $E_{ij}, E_{j\ell} \in k^{n\times n}$.

**Lösung:** *Richtig:* $E_{ij}$ ist die Abbildungsmatrix jener linearer Abbildung, die den Basisvektor $\vec{e}_j$ auf $\vec{e}_i$ abbildet und alle anderen auf den Nullvektor; entsprechend $E_{j\ell}$. Das Produkt gehört also zu jener linearen Abbildung, die $\vec{e}_\ell$ via $\vec{e}_j$ auf $\vec{e}_i$ abbildet und alle anderen Basisvektoren auf den Nullvektor, d.h. $E_{j\ell}E_{ij} = E_{i\ell}$.

*d)* Was ist $E_{j\ell}E_{ij}$ ?

**Lösung:** Für $i \neq \ell$ ist das die Nullmatrix, für $i = \ell$ nach der vorigen Aufgabe gleich $E_{jj}$, d.h. die Diagonalmatrix mit Eintrag Eins an der $j$-ten Stelle und sonst lauter Nullen.

*e)* Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$. Welche Abbildungsmatrix hat sie bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ ?

**Lösung:** In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren, dargestellt als Linearkombinationen der Basisvektoren. Hier ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Der erste Basisvektor wird also einfach mit vier multipliziert und der zweite mit fünf. Die Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis ist daher die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

*f)* Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M$ der linearen Abbildung $\varphi$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x-4y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$!

**Lösung:** Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird der eine Vektor der neuen Basis auf sich selbst abgebildet, der andere auf sein Negatives. Damit ist $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

*g)* Benutzen dies, um die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{99}$ zu berechnen!

**Lösung:** Die zu potenzierende Matrix $A$ ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi$ aus der vorigen Aufgabe bezüglich der Standardbasis; $A^{99}$ ist also, ebenfalls bezüglich der Standardbasis, die Abbildungsmatrix der 99-maligen Hintereinanderausführung von $\varphi$.
Bezüglich der Basis Basis aus der vorigen Aufgabe hat $\varphi$ die Diagonalmatrix $M$ als Abbildungsmatrix. Für diese ist $M^e = M$ für ungerades $e$ und $M^e = E$ für gerades $e$. Damit ist auch die $e$-fache Hintereinanderausführung von $\varphi$ für ungerades $e$ gleich $\varphi$ und für gerades $e$ gleich der Identität. Da 99 ungerade ist, ist die 99-fache Hintereinanderausführung von $\varphi$ wieder $\varphi$ selbst, hat also bezüglich der Standardbasis die Abbildungsmatrix $A$. Somit ist $A^{99} = A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
(Alternativ: $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ läßt sich schreiben als $A = B^{-1}MB$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$A^{99} = \underbrace{B^{-1}MB \cdot B^{-1}MB \cdot \cdots \cdot B^{-1}MB \cdot B^{-1}MB}_{99 \text{ Faktoren}} = B^{-1}M^{99}B = B^{-1}MB = A\,,$$

denn die Zwischenfaktoren $B \cdot B^{-1} = E$ fallen heraus und $M^{99} = M$. Wie die Matrix $B$ und ihr Inverses konkret aussehen, ist in diesem einfachen Fall irrelevant; bei weniger trivialen Problemen muß man sie natürlich berechnen und auch $B^{-1}M^{99}B$ wirklich ausrechnen. Hier ist übrigens zufälligerweise $B^{-1} = -B$.)

*h)* Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$!

**Lösung:** Wir schreiben eine Einheitsmatrix hinter $A$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Für die erste Spalte addieren wir die erste Zeile zweimal zur zweiten und subtrahieren sie von der dritten:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Entsprechend behandeln wir die zweite Spalte: Wir addieren zweimal die zweite Zeile zur

dritten und subtrahieren sie von der vierten:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Schließlich addieren wir noch zweimal die dritte Zeile zur vierten und erhalten

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Hier steht links eine obere und rechts eine untere Dreiecksmatrix, also ist $ZA = R$ mit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus $ZA = R$ folgt $A = LR = Z^{-1}R$; wir müssen also noch $Z$ invertieren. Der GAUSS-Algorithmus führt auf

$$L = Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*i)* Bestimmen Sie zur Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ Dreiecksmatrizen $Z, R$ mit $ZA = R$!

**Lösung:** Gleiches Verfahren: Wir schreiben eine Einheitsmatrix hinter die gegebene Matrix:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Da die Hauptnenner der Zeilen teilweise schon recht groß sind, ist es wahrscheinlich am besten, sich an die Regeln der Bruchrechnung zu erinnern und sie stur anzuwenden: Wir subtrahieren zunächst zwei Drittel der ersten Zeile von der zweiten und die halbe erste Zeile von der dritten:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} \\ 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{24} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

Dann muß noch sechs Fünftel der zweiten Zeile von der dritten subtrahiert werden:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{6}{5} & 1 \end{array}$$

Damit sind wir fertig und haben das Ergebnis

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{10} & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

*j)* Berechnen Sie $A^{-1}$ mit Hilfe der Matrizen $Z$ und $R$!

**Lösung:** Aus $ZA = R$ folgt $A = Z^{-1}R$ oder $A^{-1} = R^{-1}Z$. Hier ist

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -24 & 180 \\ 0 & 36 & -720 \\ 0 & 0 & 600 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = R^{-1}L = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix}.$$

*k)* Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = a, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = b \quad \text{und} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = c$$

in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$!

**Lösung:** Nachdem wir $A^{-1}$ schon kennen, können wir einfach sagen, daß $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ hat, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72a - 240b + 180c \\ -240a + 900b - 720c \\ 180a - 720b + 600c \end{pmatrix}.$$

(An den großen Koeffizienten hier sieht man übrigens auch, warum Gleichungssysteme dieser Art so empfindlich auf Störungen der rechten Seite und damit auch auf Rundungsfehler reagieren; entsprechende Matrizen der Größen $6 \times 6$ und $15 \times 15$ kennen wir bereits aus der Vorlesung als Beispiele für Schwierigkeiten beim numerischen Lösen linearer Gleichungssysteme.)

*l)* Überlegen Sie sich, daß die komplexen Zahlen $1+i$ und $1-i$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ bilden, und konstruieren Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß gilt

$$a + ib = \lambda(1+i) + \mu(1-i) \iff A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}!$$

**Lösung:** Da die Vektoren der zweiten Basis schon durch die erste ausgedrückt sind, sehen wir sofort, daß (hier nicht nur symbolisch, sondern als echte Matrixgleichung über $\mathbb{C}$)

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{ist; mit} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist somit $A = {}^tM^{-1}$ und $B = A^{-1} = {}^tM$. Damit ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man $B$ auch direkt berechnen durch Ausmultiplizieren:

$$\lambda(1+i) + \mu(1-i) = (\lambda + \mu)1 + (\lambda - \mu)i.$$

Daraus läßt die die Matrix $B$ direkt ablesen, und $A$ ist natürlich invers dazu.

*m)* Zeigen Sie, daß die TSCHEBYSCHEFF-Polynome $T_0 = 1$, $T_1 = x$, $T_2 = 2x^2 - 1$ und $T_3 = 4x^3 - 3x$ eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens drei bilden, und bestimmen Sie die Matrizen $A, B$ für die gilt: Ist

$$\begin{aligned} &a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= b_3T_3 + b_2T_2 + b_1T_1 + b_0T_0 \end{aligned}, \quad \text{so ist} \quad A\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ und } B\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}!$$

**Lösung:** Da die TSCHEBYSCHEFF-Polynome verschiedene Grade haben, müssen sie linear unabhängig sein; da auch die Anzahl stimmt, bilden sie also eine Basis.

Die Matrix der Koeffizienten, mit denen sie als Linearkombination der $x$-Potenzen dargestellt sind, ist

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{denn} \quad \begin{aligned} T_0 &= 1 \cdot 1 \\ T_1 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x \\ T_2 &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2 \\ T_3 &= 0 \cdot 1 - 3 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 \end{aligned} .$$

Damit ist $B = {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$A = B^{-1}$ kann daraus einfach nach GAUSS berechnet werden: Wir schreiben zunächst die Einheitsmatrix neben $B$:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Indem wir die dritte Zeile durch zwei und die vierte durch vier dividieren, erhalten wir links eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{matrix}$$

Zur Einheitsmatrix links kommen wir, indem wir dreimal die letzte Zeile zur zweiten addieren sowie die dritte zur ersten:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{matrix}$$

Somit ist $A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

*Alternativ:* Wir drücken die Elemente der Basis $(1, x, x^2, x^3)$ explizit als Linearkombinationen der $T_i$ aus: $1 = T_0$ und $x = T_1$ sind problemlos. Für $x^2$ brauchen wir $T_2 = 2x^2 - 1$ und sehen, daß

$$x^2 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0$$

ist. Entsprechend führt der Vergleich von $x^3$ mit $T_3 = 4x^3 - 3x$ auf

$$x^3 = \frac{1}{4}T_3 + \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}T_3 + \frac{3}{4}T_1 .$$

Die Koeffizientenmatrix für die Darstellung der $x^i$ durch die $T_i$ ist damit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = {}^tM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} .$$