WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. April 2007

a) M sei die $n \times m$-Matrix, deren sämtliche Einträge gleich Eins sind; $D \in k^{n\times n}, D' \in k^{m\times m}$ seien Diagonalmatrizen mit Einträgen $d_1, \dots, d_n$ *bzw.* $e_1, \dots, e_m$. Was ist DMD' ?

Lösung: Multipliziert man von links mit einer Diagonalmatrix, werden die Zeilen mit den Diagonaleinträgen multipliziert; die Matrix DM hat also in ihrer i-ten Zeile lauter Einträge d_i. Multipliziert man von rechts mit einer Diagonalmatrix, werden die *Spalten* mit den Diagonaleinträgen multipliziert; angewandt auf DM heißt das, daß der (i,j)-Eintrag von DMD' gleich $d_i e_j$ ist.

b) Welchen Rang hat DMD' ?

Lösung: Höchstens eins, denn offensichtlich hat M den Rang eins, und die Multiplikation mit einer weiteren Matrix kann den Rang nicht vergrößern: Der Rang einer Matrix ist die Dimension des Bilds der dazugehörigen linearen Abbildung, und das Bild einer zusammengesetzten Abbildung kann keine größere Dimension haben als das einer jeden Teilabbildung. Falls D oder D' die Nullmatrix sind, so auch DMD'; in diesem Fall ist der Rang also gleich null. Ansonsten hat DMD' mindestens einen von Null verschiedenen Eintrag und damit Rang eins.

c) Richtig oder falsch: $E_{ij}E_{j\ell} = E_{i\ell}$ für $E_{ij}, E_{j\ell} \in k^{n\times n}$.

Lösung: *Richtig:* E_{ij} ist die Abbildungsmatrix jener linearer Abbildung, die den Basisvektor $\vec{e}_j$ auf $\vec{e}_i$ abbildet und alle anderen auf den Nullvektor; entsprechend $E_{j\ell}$. Das Produkt gehört also zu jener linearen Abbildung, die $\vec{e}_\ell$ via $\vec{e}_j$ auf $\vec{e}_i$ abbildet und alle anderen Basisvektoren auf den Nullvektor, d.h. $E_{j\ell}E_{ij} = E_{i\ell}$.

d) Was ist $E_{j\ell}E_{ij}$?

Lösung: Für $i \neq \ell$ ist das die Nullmatrix, für $i = \ell$ nach der vorigen Aufgabe gleich E_{jj}, d.h. die Diagonalmatrix mit Eintrag Eins an der j-ten Stelle und sonst lauter Nullen.

e) Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$. Welche Abbildungsmatrix hat sie bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$?

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren, dargestellt als Linearkombinationen der Basisvektoren. Hier ist

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Der erste Basisvektor wird also einfach mit vier multipliziert und der zweite mit fünf. Die Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis ist daher die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix M der linearen Abbildung φ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x-4y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird der eine Vektor der neuen Basis auf sich selbst abgebildet, der andere auf sein Negatives. Damit ist $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

g) Benutzen dies, um die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{99}$ zu berechnen!

Lösung: Die zu potenzierende Matrix A ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung φ aus der vorigen Aufgabe bezüglich der Standardbasis; A^{99} ist also, ebenfalls bezüglich der Standardbasis, die Abbildungsmatrix der 99-maligen Hintereinanderausführung von φ.

Bezüglich der Basis Basis aus der vorigen Aufgabe hat φ die Diagonalmatrix M als Abbildungsmatrix. Für diese ist $M^e = M$ für ungerades e und $M^e = E$ für gerades e. Damit ist auch die e-fache Hintereinanderausführung von φ für ungerades e gleich φ und für gerades e gleich der Identität. Da 99 ungerade ist, ist die 99-fache Hintereinanderausführung von φ wieder φ selbst, hat also bezüglich der Standardbasis die Abbildungsmatrix A. Somit ist $A^{99} = A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(Alternativ: $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ läßt sich schreiben als $A = B^{-1}MB$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$A^{99} = \underbrace{B^{-1}MB \cdot B^{-1}MB \cdot \;\cdots\; \cdot B^{-1}MB \cdot B^{-1}MB}_{99 \text{ Faktoren}} = B^{-1}M^{99}B = B^{-1}MB = A\,,$$

denn die Zwischenfaktoren $B \cdot B^{-1} = E$ fallen heraus und $M^{99} = M$. Wie die Matrix B und ihr Inverses konkret aussehen, ist in diesem einfachen Fall irrelevant; bei weniger trivialen Problemen muß man sie natürlich berechnen und auch $B^{-1}M^{99}B$ wirklich ausrechnen. Hier ist übrigens zufälligerweise $B^{-1} = -B$.)

h) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir schreiben eine Einheitsmatrix hinter A:

$$\begin{array}{rrrr@{\qquad}rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Für die erste Spalte addieren wir die erste Zeile zweimal zur zweiten und subtrahieren sie von der dritten:

$$\begin{array}{rrrr@{\qquad}rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Entsprechend behandeln wir die zweite Spalte: Wir addieren zweimal die zweite Zeile zur dritten und subtrahieren sie von der vierten:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Schließlich addieren wir noch zweimal die dritte Zeile zur vierten und erhalten

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Hier steht links eine obere und rechts eine untere Dreiecksmatrix, also ist $ZA = R$ mit

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus $ZA = R$ folgt $A = LR = Z^{-1}R$; wir müssen also noch Z invertieren. Der GAUSS-Algorithmus führt auf

$$L = Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie zur Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac13 & \frac14 \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 \\ \frac14 & \frac15 & \frac16 \end{pmatrix}$ Dreiecksmatrizen Z, R mit $ZA = R$!

Lösung: Gleiches Verfahren: Wir schreiben eine Einheitsmatrix hinter die gegebene Matrix:

$$\begin{array}{ccc} \frac12 & \frac13 & \frac14 \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 \\ \frac14 & \frac15 & \frac16 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Da die Hauptnenner der Zeilen teilweise schon recht groß sind, ist es wahrscheinlich am besten, sich an die Regeln der Bruchrechnung zu erinnern und sie stur anzuwenden: Wir subtrahieren zunächst zwei Drittel der ersten Zeile von der zweiten und die halbe erste Zeile von der dritten:

$$\begin{array}{ccc} \frac12 & \frac13 & \frac14 \\ 0 & \frac1{36} & \frac1{30} \\ 0 & \frac1{30} & \frac1{24} \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac23 & 1 & 0 \\ -\frac12 & 0 & 1 \end{array}$$

Dann muß noch sechs Fünftel der zweiten Zeile von der dritten subtrahiert werden:

$$\begin{array}{ccc} \frac12 & \frac13 & \frac14 \\ 0 & \frac1{36} & \frac1{30} \\ 0 & 0 & \frac1{600} \end{array} \qquad \begin{array}{rrc} 1 & 0 & 0 \\ -\frac23 & 1 & 0 \\ \frac3{10} & -\frac65 & 1 \end{array}$$

Damit sind wir fertig und haben das Ergebnis

$$R = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac13 & \frac14 \\ 0 & \frac1{36} & \frac1{30} \\ 0 & 0 & \frac1{600} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac23 & 1 & 0 \\ \frac3{10} & -\frac65 & 1 \end{pmatrix}$$

j) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe der Matrizen Z und R!

Lösung: Aus $ZA = R$ folgt $A = Z^{-1}R$ oder $A^{-1} = R^{-1}Z$. Hier ist

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -24 & 180 \\ 0 & 36 & -720 \\ 0 & 0 & 600 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = R^{-1}L = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix}.$$

k) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = a, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = b \quad \text{und} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = c$$

in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$!

Lösung: Nachdem wir A^{-1} schon kennen, können wir einfach sagen, daß $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ hat, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72a - 240b + 180c \\ -240a + 900b - 720c \\ 180a - 720b + 600c \end{pmatrix}.$$

(An den großen Koeffizienten hier sieht man übrigens auch, warum Gleichungssysteme dieser Art so empfindlich auf Störungen der rechten Seite und damit auch auf Rundungsfehler reagieren; entsprechende Matrizen der Größen 6×6 und 15×15 kennen wir bereits aus der Vorlesung als Beispiele für Schwierigkeiten beim numerischen Lösen linearer Gleichungssysteme.)

l) Überlegen Sie sich, daß die komplexen Zahlen $1+i$ und $1-i$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ bilden, und konstruieren Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß gilt

$$a + ib = \lambda(1+i) + \mu(1-i) \iff A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}!$$

Lösung: Da die Vektoren der zweiten Basis schon durch die erste ausgedrückt sind, sehen wir sofort, daß (hier nicht nur symbolisch, sondern als echte Matrixgleichung über $\mathbb{C}$)

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{ist; mit} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist somit $A = {}^tM^{-1}$ und $B = A^{-1} = {}^tM$. Damit ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man B auch direkt berechnen durch Ausmultiplizieren:

$$\lambda(1+i) + \mu(1-i) = (\lambda+\mu)1 + (\lambda-\mu)i.$$

Daraus läßt die die Matrix B direkt ablesen, und A ist natürlich invers dazu.

m) Zeigen Sie, daß die TSCHEBYSCHEFF-Polynome $T_0 = 1$, $T_1 = x$, $T_2 = 2x^2 - 1$ und $T_3 = 4x^3 - 3x$ eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens drei bilden, und bestimmen Sie die Matrizen A, B für die gilt: Ist

$$\begin{matrix} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ = b_3T_3 + b_2T_2 + b_1T_1 + b_0T_0 \end{matrix}, \text{ so ist } \quad A\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ und } B\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}!$$

Lösung: Da die TSCHEBYSCHEFF-Polynome verschiedene Grade haben, müssen sie linear unabhängig sein; da auch die Anzahl stimmt, bilden sie also eine Basis.

Die Matrix der Koeffizienten, mit denen sie als Linearkombination der x-Potenzen dargestellt sind, ist

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{denn} \quad \begin{aligned} T_0 &= 1 \cdot 1 \\ T_1 &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot x \\ T_2 &= -1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2 \\ T_3 &= 0 \cdot 1 - 3 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 \end{aligned} \quad .$$

Damit ist $B = {}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$A = B^{-1}$ kann daraus einfach nach GAUSS berechnet werden: Wir schreiben zunächst die Einheitsmatrix neben B:

$$\begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & 0 & -1 & 0 & \quad & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Indem wir die dritte Zeile durch zwei und die vierte durch vier dividieren, erhalten wir links eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen:

$$\begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & 0 & -1 & 0 & \quad & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & \frac14 \end{array}$$

Zur Einheitsmatrix links kommen wir, indem wir dreimal die letzte Zeile zur zweiten addieren sowie die dritte zur ersten:

$$\begin{array}{rrrrcrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & \quad & 1 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & \frac34 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & \frac14 \end{array}$$

Somit ist $A = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac34 \\ 0 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac14 \end{pmatrix}$.

Alternativ: Wir drücken die Elemente der Basis $(1, x, x^2, x^3)$ explizit als Linearkombinationen der T_i aus: $1 = T_0$ und $x = T_1$ sind problemlos. Für x^2 brauchen wir $T_2 = 2x^2 - 1$ und sehen, daß

$$x^2 = \frac12 T_2 + \frac12 = \frac12 T_2 + \frac12 T_0$$

ist. Entsprechend führt der Vergleich von x^3 mit $T_3 = 4x^3 - 3x$ auf

$$x^3 = \frac14 T_3 + \frac34 x = \frac14 T_3 + \frac34 T_1 \,.$$

Die Koeffizientenmatrix für die Darstellung der x^i durch die T_i ist damit

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac34 & 0 & \frac12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = {}^tM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac34 \\ 0 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac14 \end{pmatrix} .$$