WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 23. April 2007

a) M sei die $n \times m$-Matrix, deren sämtliche Einträge gleich Eins sind; $D \in k^{n\times n}, D' \in k^{m\times m}$ seien Diagonalmatrizen mit Einträgen $d_1, \dots, d_n$ *bzw.* $e_1, \dots, e_m$. Was ist DMD' ?

b) Welchen Rang hat DMD' ?

c) *Richtig oder falsch:* $E_{ij}E_{j\ell} = E_{i\ell}$ für $E_{ij}, E_{j\ell} \in k^{n\times n}$.

d) Was ist $E_{j\ell}E_{ij}$?

e) Die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -21 & 11 \end{pmatrix}$. Welche Abbildungsmatrix hat sie bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$?

f) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix M der linearen Abbildung φ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x - 4y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis aus den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$!

g) Benutzen dies, um die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{99}$ zu berechnen!

h) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$!

i) Bestimmen Sie zur Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac13 & \frac14 \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 \\ \frac14 & \frac15 & \frac16 \end{pmatrix}$ Dreiecksmatrizen Z, R mit $ZA = R$!

j) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe der Matrizen Z und R!

k) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = a, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = b \quad \text{und} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = c$$

in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$!

l) Überlegen Sie sich, daß die komplexen Zahlen $1+i$ und $1-i$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ bilden, und konstruieren Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so daß gilt

$$a + ib = \lambda(1+i) + \mu(1-i) \iff A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}!$$

m) Zeigen Sie, daß die TSCHEBYSCHEFF-Polynome $T_0 = 1$, $T_1 = x$, $T_2 = 2x^2 - 1$ und $T_3 = 4x^3 - 3x$ eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens drei bilden, und bestimmen Sie die Matrizen A, B für die gilt: Ist

$$\begin{aligned} &a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= b_3T_3 + b_2T_2 + b_1T_1 + b_0T_0 \end{aligned}, \text{ so ist } \quad A\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ und } B\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}!$$