WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16. April 2007

a) Lösen Sie für $a \in \{0,1\}$ das lineare Gleichungssystem $x+y=1$, $y+z=0$ und $x+z=a$ sowohl über $\mathbb{F}_2$ als auch über $\mathbb{R}$!

Lösung: Subtraktion der ersten Gleichung von der dritten ergibt das Gleichungssystem

$$x+y=1, \qquad y+z=0, \qquad -y+z=a-1\,;$$

addiert man hier noch die zweite Gleichung zur dritten, entsteht die Endgestalt

$$x+y=1, \qquad y+z=0, \qquad z+z=a-1\,.$$

Bis hierher gilt alles sowohl über $\mathbb{F}_2$ als auch über $\mathbb{R}$; ab jetzt müssen wir die beiden Fälle unterscheiden.

Wenn wir über $\mathbb{F}_2$ arbeiten, ist $z+z=0$, das LGS ist damit höchstens für $a=1$ lösbar: Für $a=0$ wird die dritte Gleichung zu $0=1$. Für $a=1$ ist sie $0=0$, kann also ignoriert werden, und die zweite ist äquivalent zu $y=z$. Wir können daher z gleich einem beliebigen $\lambda \in \mathbb{F}_2$ setzen; dann ist auch $y=\lambda$ und, nach der ersten Gleichung, $x=1+\lambda$. Die Lösungsmenge über $\mathbb{F}_2$ ist somit für $a=1$ die Menge

$$\big\{(1+\lambda,\lambda,\lambda) \bigm| \lambda \in \mathbb{F}_2\big\} = \big\{(1,0,0),\ (0,1,1)\big\}\,,$$

und für $a=0$ ist sie die leere Menge $\emptyset$.

Über $\mathbb{R}$ wird die dritte Gleichung zu $2z=a-1$, d.h. $z=\frac{a-1}{2}$; eingesetzt in die zweite Gleichung führt dies auf $y=-z=\frac{1-a}{2}$, was schließlich via die erste Gleichung auf $x=1-y=1+z=\frac{a+1}{2}$ führt. Für $a=0$ haben wir also die eindeutige Lösung $(\frac12,\frac12,-\frac12)$, für $a=1$ entsprechend $(1,0,0)$.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen des reellen linearen Gleichungssystems

$$x-y-z+u=0, \quad x+y-z=0, \quad 3x+2y-z-u=0 \quad \text{und} \quad 2x+3y-2u=0\,!$$

Ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

Lösung: Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten sowie ihres Drei- *bzw.* Zweifachen von der zweiten *bzw.* dritten führt auf die drei Gleichungen

$$2y-u=0, \quad 5y+2z-4u=0 \quad \text{und} \quad 5y+2z-4u=0\,.$$

Die beiden letzten Gleichungen sind offensichtlich identisch, es reicht also sie einmal zu betrachten.

Da alles so einfach ist, können wir hier *ad hoc* weitermachen: Die erste Gleichung zeigt, daß $u=2y$ sein muß; setzt man dies in die verbleibende Gleichung ein, ergibt sich

$$5y+2z-8y=0 \quad \text{oder} \quad y=\frac{2z}{3}\,.$$

Für z können wir somit eine beliebige reelle Zahl λ einsetzen; dann ist $y=\frac23\lambda$ und $u=\frac43\lambda$. Wie die erste Gleichung zeigt, ist weiter

$$x=y+z-u=\frac{2}{3}\lambda+\lambda-\frac{4}{3}\lambda=\frac{\lambda}{3}\,;$$

setzen wir zur Vermeidung von Nennern $\lambda = 3\mu$, ist also

$$x = \mu, \quad y = 2\mu, \quad z = 3\mu \quad \text{und} \quad u = 4\mu\,.$$

Die Lösungsmenge ist demnach

$$\left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ 2\mu \\ 3\mu \\ 4\mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$$

(was wir beim Rechnen stur nach Gauss vielleicht sogar einfacher erhalten hätten), und das ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $2x - y + az = a, \quad 2ax + y - 2z = 0 \quad$ und $\quad 2x + ay - 2z = 0$!
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

Lösung: Wir subtrahieren die erste Gleichung a-mal von der zweiten und einmal von der dritten; die Ergebnisse sind

$$(a+1)y - (2+a^2)z = -a^2 \quad \text{und} \quad (a+1)y - (2+a)z = -a\,.$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen wiederum ist

$$(a^2 - a)z = a^2 - a\,.$$

Falls $a^2 - a = 0$ ist, d.h. $a = 0$ oder $a = 1$, steht hier $0z = 0$, woraus überhaupt nichts folgt; andernfalls können wir durch $a^2 - a$ kürzen und erhalten $z = 1$. Dies setzen wir ein in die Gleichung

$$(a+1)y - (2+a)z = -a \Longrightarrow (a+1)y = (2+a) - a = 2\,.$$

Für $a = -1$ ist diese Gleichung (und damit das gesamte Gleichungssystem) unlösbar; für $a \neq -1$ ist

$$y = \frac{2}{a+1}\,.$$

Das können wir in die erste Gleichung einsetzen und erhalten

$$x = \frac{1}{a+1}\,.$$

Für $a \notin \{0, 1, -1\}$ ist die Lösungsmenge somit die einelementige Menge

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \left(\frac{1}{a+1}, \frac{2}{a+1}, 1 \right) \right\}\,.$$

Für $a = -1$ ist das Gleichungssystem unlösbar, d.h. $\mathcal{L}_{-1} = \emptyset$.
Bleiben noch die Fälle $a = 0$ und $a = 1$. Hier können wir z frei wählen, etwa $z = \lambda$, und dann gilt

$$(a+1)y - (2+a)z = -a \Longrightarrow (a+1)y = (2+a)\lambda - a\,.$$

Für $a = 0$ folgt $y = 2\lambda$, was in die erste Gleichung eingesetzt auf $x = \lambda$ führt, d.h.

$$\mathcal{L}_0 = \big\{ (\lambda, 2\lambda, \lambda) \bigm| \lambda \in \mathbb{R} \big\}\,.$$

Für $a = 1$ folgt entsprechend $2y = 3\lambda - 1$, d.h. $y = \frac{1}{2}(3\lambda - 1)$, was auf $x = \frac{1}{4}(\lambda + 1)$ führt. Somit ist

$$\mathcal{L}_1 = \big\{ \big(\frac{1}{4}(\lambda+1), \frac{1}{2}(3\lambda - 1), \lambda \big) \bigm| \lambda \in \mathbb{R} \big\}\,.$$

Nur $\mathcal{L}_0$ ist ein Vektorraum.

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (a+1)x + 2y + 3az &= 6a \qquad &(1)\\ (2a+2)x - y - 4az &= -3a \qquad &(2)\\ (3a+3)x + 2y + 2az &= 9a \qquad &(3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *(aus der Modulklausur vom April 2004)*

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten und dreimal von der dritten:

$$\begin{aligned} -5y - 10az &= -15a \qquad &(4)\\ -4y - 7az &= -9a \qquad &(5) \end{aligned}$$

Gleichung (4) kann durch fünf gekürzt werden und beide Gleichungen werden angenehmer, wenn man sie mit (-1) multipliziert; dies führt auf die äquivalenten Gleichungen

$$\begin{aligned} y + 2az &= 3a \qquad &(6)\\ 4y + 7az &= 9a \qquad &(7) \end{aligned}$$

Hier läßt sich nun y einfach aus (7) eliminieren, indem wir viermal Gleichung (6) subtrahieren; dies führt auf

$$-az = -3a\,.$$

Für $a = 0$ ist diese Gleichung für jedes z erfüllt; für $a \neq 0$ erhalten wir $z = 3$. Gleichung (6) sagt uns dann, daß

$$y = 3a - 2az = \begin{cases} -3a & \text{für } a \neq 0\\ 0 & \text{für } a = 0 \end{cases}$$

ist, und nach Gleichung (1) ist

$$(a+1)x = 6a - 2y - 3az = \begin{cases} 3a & \text{für } a \neq 0\\ 0 & \text{für } a = 0 \end{cases}.$$

Damit ist das Gleichungssystem für $a = -1$ unlösbar, ansonsten ist

$$x = \frac{3a}{a+1}\,,$$

was auch den Fall $x = 0$ für $a = 0$ einschließt. Damit ist

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(\frac{3a}{a+1}, -3a, 3\right)\right\} & \text{für } a \neq 0, -1\\ \left\{(0,0,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = 0\\ \emptyset & \text{für } a = -1 \end{cases}.$$

e) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems *(aus der Scheinklausur 2002)*

$$\begin{aligned} aw + x + 2y + z &= a+2 \qquad &(1)\\ -aw + x - 4y + z &= a-2 \qquad &(2)\\ -aw + 2x + (2a-1)y + 5z &= 2a+4 \qquad &(3)\\ -3aw - 5x + 2ay + az &= 4-3a \qquad &(4) \end{aligned}$$

Lösung: Zur Elimination von w aus den letzen drei Gleichungen addieren wir dreimal die erste Gleichung zur letzten, und wir addieren sie jeweils einfach zur zweiten und zur dritten:

$$\begin{array}{rrrll} 2x - & 2y + & 2z & = 2a & (7) \\ x - & y + & z & = a & (7') \\ 3x + & (2a+1)y + & 6z & = 3a+6 & (8) \\ -2x + & (2a+6)y + & (a+3)z & = 10 & (9) \end{array}$$

(Gleichung $(7')$ ist die der Übersichtlichkeit halber durch zwei dividierte Gleichung (7).)
Als nächstes soll y aus den Gleichungen (8) und (9) eliminiert werden; dazu subtrahieren wir dreimal Gleichung $(7')$ von (8) und addieren ihr Doppeltes (also Gleichung (7)) zu Gleichung (9):

$$\begin{array}{rrll} (2a+4)y + & 3z & = 6 & (10) \\ (2a+4)y + & (a+5)z & = 2a+10 & (11) \end{array}$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen voneinander liefert die Gleichung

$$(a+2)z = (2a+4)$$

Für $a \neq -2$ können wir kürzen und erhalten $z = 2$; für $a = -2$ haben wir die Gleichung $0 \cdot z = 0$, aus der nichts folgt.
Für $a \neq -2$ können wir $z = 2$ in Gleichung (10) einsetzen und erhalten

$$(a+2)y + 3 \cdot 2 = 6, \quad \text{also} \quad y = 0\,,$$

denn für $a \neq -2$ ist $a + 2 \neq 0$.
Gleichung $(7')$ wird nach Einsetzen von $z = 2$ und $y = 0$ zu

$$x + 2 = a \quad \text{oder} \quad x = a - 2\,.$$

Das müssen wir nun nur noch in Gleichung (1) einsetzen:

$$aw + (a-2) + 0 + 2 = a + 2 \quad \text{oder} \quad aw = 2\,.$$

Für $a \neq 0$ folgt daraus $w = \dfrac{2}{a}$; für $a = 0$ ist das Gleichungssystem unlösbar.
Fehlt noch der Fall $a = -2$. Dann wird Gleichung (10) zu

$$0y + 3z = 6, \qquad \text{d.h.} \quad z = 2 \quad \text{und} \quad y = \lambda \in \mathbb{R} \ \text{beliebig.}$$

Einsetzen in Gleichung (7') zeigt, daß

$$x - \lambda + 2 = a = -2 \quad \text{oder} \quad x = \lambda - 4$$

ist, woraus nach Gleichung (1) folgt, daß

$$-2w + (\lambda - 4) + 2\lambda + 2 = 4 \quad \text{oder} \quad w = \frac{3}{2}\lambda - 1\,.$$

Insgesamt ist also

$$\mathcal{L}_a = \begin{cases} \{(\frac{2}{a}, a-2, 0, 2)\} & \text{für } a \neq 0 \text{ und } a \neq -2 \\ \{(\frac{3}{2}\lambda - 1, \lambda - 4, \lambda, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} & \text{für } a = -2 \\ \emptyset & \text{für } a = 0 \end{cases} .$$

f) Richtig oder falsch: Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n \times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m \times n}$ mit $AB = E$.

Lösung: *Richtig:* Die Spalten einer $n \times r$-Matrix sind Vektoren aus k^n, also kann der Rang einer solchen Matrix höchstens gleich n sein. Betrachten wir ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, so gilt dies insbesondere auch für dessen erweiterte Matrix; wenn A bereits Rang n hat, muß also auch die erweiterte Matrix Rang n haben. Somit ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für *jede* rechte Seite $\vec{b}$ lösbar. Dies gilt insbesondere auch dann, wenn wir für $\vec{b}$ die verschiedenen Spaltenvektoren der Einheitsmatrix E einsetzen, also ist auch die Matrixgleichung $AX = E$ lösbar, und für jede Lösung $X = B$ ist $AB = E$.

g) *Richtig oder falsch:* Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $BA = E$.

Lösung: *Falsch,* denn bei der Multiplikation BA stehen die Koeffizienten der unbekannten Einträge von B in den *Spalten* von A; für jede Zeile von B haben wir also ein Gleichungssystem aus m Gleichungen in n Unbekannten. Die erweiterte Matrix eines solchen Gleichungssystems ist daher eine $(n+1) \times m$-Matrix, und die kann ohne weiteres auch Rang $n+1$ haben.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hier hat die Gleichung $AB = E$ viele Lösungen, nämlich alle Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\mu \\ -\lambda & 1-\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$, aber $BA = E$ ist unlösbar: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ des Gleichungssystems bekommt bei Erweiterung um eine Spalte der Einheitsmatrix stets den Rang drei.

h) Bestimmen Sie alle Matrizen X, für die gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir schreiben die beiden Matrizen hintereinander

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und beginnen dann mit der GAUSS-Elimination: Zuerst wird die erste Zeile einfach von der zweiten und dreifach von der dritten subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Als nächstes suibtrahieren wir die zweite Zeile von der dritten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit stehen unter der Hauptdiagonalen lauter Nullen; oberhalb der Hauptdiagonalen gibt es nur in der ersten Zeile noch von Null verschiedene Einträge, die wir zum Verschwinden bringen, indem wir die zweite Zeile addieren und die dritte zweifach subtrahieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abgesehen vom Minuszeichen in der zweiten Zeile steht nun links die Einheitsmatrix, wir müssen also nur noch die zweite Zeile mit -1 multiplizieren und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gibt es genau die eine Lösung

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

i) Berechnen Sie die inversen Matrizen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Wir schreiben die Einheitsmatrix hinter A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da unter der Hauptdiagonalen schon lauter Nullen stehen, müssen wir keine Eliminationsschritte durchführen; wir beginnen also gleich damit, die vierte Zeile viermal von der ersten, dreimal von der zweiten und zweimal von der dritten zu subtrahieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als nächstes wird die dritte Zeile dreimal von der ersten und zweimal von der zweiten subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als letztes muß noch zweimal die zweite Zeile von der ersten subtrahiert werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun steht links die Einheitsmatrix, rechts also die inverse Matrix zu A, d.h.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ganz entsprechend wird auch B nach rechts um eine Einheitsmatrix erweitert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 1 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier sind Eliminationsschritte notwendig; wir subtrahieren zunächst die erste Zeile dreimal von der zweiten und einmal von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-6 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier würde sich anbieten, die zweite Zeile durch $\lambda - 6$ zu dividieren; allerdings mußten wir dann den Fall $\lambda = 6$ separat betrachten. Um eine möglicherweise notwendige Fallunterscheidung soweit wie möglich hinauszuschieben, vertauschen wir stattdessen zunächst die zweite und die dritte Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-6 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann kann die Elimination ohne Division fortgeführt werden durch Subtraktion von $(\lambda-6)$ mal der zweiten Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-9 & 1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Nun stehen unterhalb der Hauptdiagonalen von B nur noch Nullen, und wir können zu den Einträgen oberhalb der Diagonalen übergehen. Als erstes addieren wir die dritte Zeile zur ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \lambda-8 & 1 & 6-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-9 & 1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Als nächstes wird zweimal die zweite Zeile von der ersten subtrahiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda-6 & 1 & 4-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda-9 & 1 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Schließlich muß noch die letzte Zeile mit -1 multipliziert werden, damit links eine Einheitsmatrix entsteht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda-6 & 1 & 4-\lambda \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9-\lambda & -1 & \lambda-6 \end{pmatrix}$$

Damit ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda-6 & 1 & 4-\lambda \\ -1 & 0 & 1 \\ 9-\lambda & -1 & \lambda-6 \end{pmatrix}$; insbesondere ist B also für jedes λ invertierbar.

j) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

Lösung: Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie den maximal möglichen Rang drei hat. Der dritte Spaltenvektor ist offenbar stets linear unabhängig von den ersten beiden, denn er hat als einziger eine nichtverschwindende dritte Komponente. Damit sind die drei Spaltenvektoren genau dann linear abhängig, wenn die ersten beiden linear abhängig sind, d.h. wenn $c = 0$ ist. Die Matrix ist daher genau dann invertierbar, wenn c nicht verschwindet.

k) Berechnen Sie in den invertierbaren Fällen die inverse Matrix A^{-1}!

Lösung: Wir nehmen an, daß c nicht verschwindet. Dann schreiben wir die Einheitsmatrix hinter die Matrix A:

$$\begin{pmatrix} -1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der ersten und dritten Zeile mit -1 sowie der zweiten mit $1/c$ macht daraus

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & -b & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Addition von b-mal der dritten Zeile zur ersten und $-d/c$-mal der dritten Zeile zur zweiten führt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & -1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & \frac{d}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich wird noch a-mal die zweite Zeile zur ersten addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{a}{c} & \frac{ad}{c} - b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{c} & \frac{d}{c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun steht links die Einheitsmatrix, rechts also die inverse Matrix zu A, d.h.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{a}{c} & \frac{ad}{c} - b \\ 0 & \frac{1}{c} & \frac{d}{c} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{a}{c} & \frac{ad-bc}{c} \\ 0 & \frac{1}{c} & \frac{d}{c} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

l) *Richtig oder falsch:* Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

Lösung: *Richtig,* denn wenn sie nicht invertierbar wäre, müßten der Rang kleiner als zwei sein, die beiden Spalten also linear abhängig sein. Da die erste Spalte nicht der Nullvektor ist, gäbe es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß die zweite Spalte das λ-fache der ersten wäre. Dazu müßte $\lambda = -b/a = a/b$ sein, also $-b^2 = a^2$. Das ist aber für $a, b \neq 0$ unmöglich, denn das Quadrat einer reellen Zahl ungleich null ist stets positiv.

(Alternativ könnte man sich daran erinnern, daß die Matrix gerade die Abbildungsmatrix der Multiplikationsabbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zum Faktor $a + bi$ ist; diese ist bijektiv, also ist ihre Matrix invertierbar.)

m) *Richtig oder falsch:* Für alle $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

Lösung: *Falsch,* denn für komplexe Zahlen können die beiden Spalten proportional werden: Die oben abgeleitete Beziehung $-b^2 = a^2$ zeigt im Komplexen nur, daß $b = \pm ia$ sein muß. Damit ist beispielsweise für $a = 1$ und $b = i$ die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar.

n) *Zeigen Sie:* Falls für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in k^{n \times n}$ gilt $AB + BA = 0$, so ist auch $A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1} = 0$.

Lösung: $AB + BA = 0 \implies AB = -BA \implies (AB)^{-1} = -(BA)^{-1}$ Da die inverse Matrix eines Produkts das Produkt der Inversen der Faktoren in umgekehrter Reihenfolge ist, können wir dies weiter ausrechnen als $B^{-1}A^{-1} = -A^{-1}B^{-1}$, und daraus folgt die Behauptung $A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1} = 0$.