Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16. April 2007

a) Lösen Sie für $a \in \{0,1\}$ das lineare Gleichungssystem $x+y=1$, $y+z=0$ und $x+z=a$ sowohl über $\mathbb{F}_2$ als auch über $\mathbb{R}$!

b) Bestimmen Sie alle Lösungen des reellen linearen Gleichungssystems

$$x-y-z+u=0, \quad x+y-z=0, \quad 3x+2y-z-u=0 \quad \text{und} \quad 2x+3y-2u=0!$$

Ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $2x-y+az=a$, $2ax+y-2z=0$ und $2x+ay-2z=0$!
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (a+1)x+2y+3az &= 6a \quad (1)\\ (2a+2)x-y-4az &= -3a \quad (2)\\ (3a+3)x+2y+2az &= 9a \quad (3)\end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *(aus der Modulklausur vom April 2004)*

e) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems *(aus der Scheinklausur 2002)*

$$\begin{aligned} aw+x+2y+z &= a+2 \quad (1)\\ -aw+x-4y+z &= a-2 \quad (2)\\ -aw+2x+(2a-1)y+5z &= 2a+4 \quad (3)\\ -3aw-5x+2ay+az &= 4-3a \quad (4)\end{aligned}$$

f) *Richtig oder falsch:* Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $AB = E$.

g) *Richtig oder falsch:* Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $BA = E$.

h) Bestimmen Sie alle Matrizen X, für die gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 7\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$!

i) Berechnen Sie die inversen Matrizen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & \lambda & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$!

j) Für welche $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ invertierbar?

k) Berechnen Sie in den invertierbaren Fällen die inverse Matrix A^{-1}!

l) *Richtig oder falsch:* Für alle $a,b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ invertierbar.

m) *Richtig oder falsch:* Für alle $a,b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ invertierbar.

n) *Zeigen Sie:* Falls für zwei invertierbare Matrizen $A,B \in k^{n\times n}$ gilt $AB+BA=0$, so ist auch $A^{-1}B^{-1}+B^{-1}A^{-1}=0$.