WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C 201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 16. April 2007

a) Lösen Sie für $a \in \{0, 1\}$ das lineare Gleichungssystem $x + y = 1$, $y + z = 0$ und $x + z = a$ sowohl über $\mathbb{F}_2$ als auch über $\mathbb{R}$!

b) Bestimmen Sie alle Lösungen des reellen linearen Gleichungssystems

$$x - y - z + u = 0, \quad x + y - z = 0, \quad 3x + 2y - z - u = 0 \quad \text{und} \quad 2x + 3y - 2u = 0\,!$$

Ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $2x - y + az = a, \quad 2ax + y - 2z = 0 \quad \text{und} \quad 2x + ay - 2z = 0\,!$
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge ein Vektorraum?

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} (a+1)x + 2y + 3az &= 6a && (1)\\ (2a+2)x - y - 4az &= -3a && (2)\\ (3a+3)x + 2y + 2az &= 9a && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *(aus der Modulklausur vom April 2004)*

e) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems *(aus der Scheinklausur 2002)*

$$\begin{aligned} aw + x + 2y + z &= a + 2 && (1)\\ -aw + x - 4y + z &= a - 2 && (2)\\ -aw + 2x + (2a-1)y + 5z &= 2a + 4 && (3)\\ -3aw - 5x + 2ay + az &= 4 - 3a && (4) \end{aligned}$$

f) Richtig oder falsch: Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $AB = E$.

g) Richtig oder falsch: Ist $n < m$ und hat $A \in k^{n\times m}$ den Rang n, so gibt es eine Matrix $B \in k^{m\times n}$ mit $BA = E$.

h) Bestimmen Sie alle Matrizen X, für die gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$!

i) Berechnen Sie die inversen Matrizen zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & \lambda & 2\\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$!

j) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

k) Berechnen Sie in den invertierbaren Fällen die inverse Matrix A^{-1}!

l) Richtig oder falsch: Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

m) Richtig oder falsch: Für alle $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b\\ b & a \end{pmatrix}$ invertierbar.

n) Zeigen Sie: Falls für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ gilt $AB + BA = 0$, so ist auch $A^{-1}B^{-1} + B^{-1}A^{-1} = 0$.