WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 26. März 2007

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis aus den drei Einheitsvektoren!

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{bezüglich der Basis } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ von } \mathbb{R}^2\text{ !}$$

c) Der Untervektorraum U von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ habe die Funktionen $\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \sin 3t$ und $\cos 3t$ als Basis. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\omega\colon U \to U;\ f \mapsto \frac{df}{dt}$!

d) V sei der Vektorraum aller reeller Polynome in x vom Grad höchstens vier. Bestimmen Sie bezüglich einer geeigneten Basis von V die Abbildungsmatrix von $\vartheta\colon \begin{cases} V \to V \\ f \mapsto x^2 f'' - 2f' - 3f \end{cases}$!

e) $\mathbb{C}$ werde als reeller Vektorraum mit Basis $\{1, i\}$ betrachtet. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von $\chi\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \Re e\, z - \Im m\, z \end{cases}$ sowie Basen des Kerns und des Bilds von χ !

f) Berechnen Sie für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Produkte AB und BA!

g) A sei eine beliebige $n \times n$-Matrix, und B sei die $n \times n$-Matrix mit lauter Einsen als Einträgen. Berechnen Sie AB und BA !

h) Welche Bedingung muß A im vorigen Beispiel erfüllen, damit $AB = BA$ ist?

i) Zeigen Sie: Für alle $a, b \in k$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

j) Für alle $a \in k$ und $n \in \mathbb{Z}$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für $n < 0$ soll dabei A^n die inverse Matrix von A^{-n} bezeichnen – falls diese existiert.

k) Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl n ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$.

l) Gilt diese Formel auch für $n = -1$?

m) In der 10×10-Matrix A sei $a_{ij} = 1$ für $j = i - 1$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Berechnen Sie A^{10} !

n) Die $n \times n$-Matrix A habe nur Nullen und Einsen als Einträge. Finden Sie Schranken u_m und o_m, so daß für jeden Eintrag b der Matrix A^m gilt: $u_m \le b \le o_m$!

o) Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

p) Was ist $e^{\pi i}$?

q) Was ist (näherungsweise) e^i ?

r) Finden Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^3 = 1$!