

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 12. März 2007

- a) Welche Dimension hat der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens n ?
- b) Welche Dimension hat der Untervektorraum $W = \{a \sin^2 t + b \cos^2 t + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ von $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
- c) Ergänzen Sie die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ zu einer Basis des \mathbb{R}^2 !
- d) *Richtig oder falsch:* Sind U_1, U_2 Untervektorräume eines Vektorraums V , so gibt es Basen B_1 von U_1 und B_2 von U_2 , so daß $B_1 \cap B_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.
- e) *Richtig oder falsch:* $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von \mathbb{R}^3 .
- f) *Richtig oder falsch:* Die Polynome $x^2, x^2 + x$ und $x^2 + x + 1$ bilden eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.
- g) Welche Dimension haben Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die den Vektor mit Komponenten x, y, z, w auf $\begin{pmatrix} x + y - z \\ y + z - w \end{pmatrix}$ abbildet?
- h) Berechnen Sie die folgenden Summen in \mathbb{F}_2^3 :
- $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}$$
- i) Finden Sie einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^3$ mit $\vec{v} + \vec{x} = \vec{u}$!
- j) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{F}_2^4 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$, die den Vektor mit Komponenten a, b, c, d auf $\begin{pmatrix} a + b \\ c + d \end{pmatrix}$ abbildet!
- k) *Richtig oder falsch:* Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus \mathbb{F}_2^3 sind linear unabhängig.
- l) Stellen Sie den ggT von 2010 und 123 als Linearkombination dieser Zahlen dar!
- m) Bestimmen Sie im Körper \mathbb{F}_{1031} die multiplikativen Inversen von zwei, zehn und zwanzig!
- n) Berechnen Sie den Bruch $\frac{3}{4}$ aus \mathbb{F}_{17} !
- o) Finden Sie sämtliche ganzzahligen Lösungen der Gleichung $120x + 81y = 24$!
- p) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß die lineare Gleichung $ax + by = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ganzzahlige Lösungen (x, y) hat!