Wolfgang K. Seiler A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5. März 2007

a) Richtig oder falsch: Sind $\varphi, \psi\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so sind auch die Abbildungen $\varphi \pm \psi\colon V \to W$ mit $(\varphi \pm \psi)(\vec v) = \varphi(\vec v) \pm \psi(\vec v)$ linear.

Lösung: *Richtig,* denn für λ, μ aus dem Grundkörper k und $\vec v, \vec w \in V$ ist

$$\begin{aligned}(\varphi \pm \psi)(\lambda\vec v + \mu\vec w) &= \varphi(\lambda\vec v + \mu\vec w) \pm \psi(\lambda\vec v + \mu\vec w)\\ &= \big(\lambda\varphi(\vec v) + \mu\varphi(\vec w)\big) \pm \big(\lambda\psi(\vec v) + \mu\psi(\vec w)\big)\\ &= \big(\lambda\varphi(\vec v) \pm \lambda\psi(\vec v)\big) + \big(\mu\varphi(\vec w) \pm \mu\psi(\vec w)\big)\\ &= \lambda\big(\varphi(\vec v) \pm \psi(\vec v)\big) + \mu\big(\varphi(\vec w) \pm \psi(\vec w)\big)\\ &= \lambda(\varphi \pm \psi)(\vec v) + \mu(\varphi \pm \psi)(\vec w)\,.\end{aligned}$$

b) Welche der folgenden Vorschriften definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$? Was sind dann Kern und Bild?

$$\pi_0\big((x,y,z)\big) = (x,y,0)\,, \qquad \pi_1\big((x,y,z)\big) = (x,y,1)\,,$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+2y\\y+2z\\z+2\end{pmatrix},\ \psi\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+2y+3z\\2x+3y+4z\\3x+4y+5z\end{pmatrix},\ \omega\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+y+z\\xy+yz+xz\\xyz\end{pmatrix}$$

Lösung: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zwei Vektoren (x,y,z) und (u,v,w) aus $\mathbb{R}^3$, die hier in der Lösung wie gewohnt als Spaltenvektoren geschrieben werden sollen (auf dem Aufgabenblatt reichte der Platz dazu nicht aus), ist

$$\begin{aligned}\pi_0\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right) &= \pi_0\left(\begin{pmatrix}\lambda x+\mu u\\\lambda y+\mu v\\\lambda z+\mu w\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\lambda x+\mu u\\\lambda y+\mu v\\0\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix}\\ &= \lambda\pi_0\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + \mu\pi_0\left(\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

also ist π_0 linear. Der Kern besteht offensichtlich genau aus den Vektoren mit $x = y = 0$, das Bild aus denen mit $z = 0$.

Für π_1 ist

$$\pi_1\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right) = \pi_1\left(\begin{pmatrix}\lambda x+\mu u\\\lambda y+\mu v\\\lambda z+\mu w\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\lambda x+\mu u\\\lambda y+\mu v\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{aber}$$

$$\lambda\pi_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + \mu\pi_1\left(\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x+\mu u\\\lambda y+\mu v\\\lambda z+\mu\end{pmatrix},$$

was im allgemeinen (z.B. für $\lambda = \mu = 1$) verschieden ist. Somit ist π_1 nicht linear, was man auch einfacher daran gesehen hätte, daß der Nullvektor nicht auf den Nullvektor abgebildet wird.

Genau aus diesem Grund ist auch φ offensichtlich nicht linear: Das Bild des Nullvektors hat dritte Komponente zwei.

ψ ist linear, denn für $\lambda, \mu \in k$ und $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$ ist

$$\psi\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right)=\psi\left(\begin{pmatrix}\lambda x+\mu u\\\lambda y+\mu v\\\lambda z+\mu w\end{pmatrix}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}(\lambda x+\mu u)+2(\lambda y+\mu v)+3(\lambda z+\mu w)\\2(\lambda x+\mu u)+3(\lambda y+\mu v)+4(\lambda z+\mu w)\\3(\lambda x+\mu u)+4(\lambda y+\mu v)+5(\lambda z+\mu w)\end{pmatrix},$$

und das ist dasselbe wie

$$\lambda\psi\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)+\mu\psi\left(\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right)=\lambda\begin{pmatrix}x+2y+3z\\2x+3y+4z\\3x+4y+5z\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}u+2v+3w\\2u+3v+4w\\3u+4v+5w\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda(x+2y+3z)+\mu(u+2v+3w)\\\lambda(2x+3y+4z)+\mu(2u+3v+4w)\\\lambda(3x+4y+5z)+\mu(3u+4v+5w)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\lambda x+\mu u)+2(\lambda y+\mu v)+3(\lambda z+\mu w)\\2(\lambda x+\mu u)+3(\lambda y+\mu v)+4(\lambda z+\mu w)\\3(\lambda x+\mu u)+4(\lambda y+\mu v)+5(\lambda z+\mu w)\end{pmatrix}.$$

Der Vektor mit Komponenten x, y, z liegt genau dann im Kern, wenn

$$x+2y+3z=0,\quad 2x+3y+4z=0\quad\text{und}\quad 3x+4y+5z=0$$

ist. Wir werden bald allgemeine Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme kennenlernen; in diesem einfachen Fall führt aber jedes in der Schule behandelte elementare Verfahren leicht zu einer Lösung.

Beispielsweise sieht man sofort, daß die Differenz zwischen zweiter und erster wie auch zwischen dritter und zweiter Gleichung jeweils die Gleichung $x+y+z=0$ ist; subtrahiert man diese von der ersten Gleichung, ergibt sich $y+2z=0$ oder $y=-2z$. Einsetzen in die Gleichung $x+y+z=0$ zeigt dann, daß $x-2z+z=0$ oder $x=z$ sein muß. Für jede Lösung ist also $x=z$ und $y=-2z$; setzt man irgendein Tripel mit $x=z$ und $y=-2z$ in die drei ursprünglichen Gleichungen ein, sieht man, daß dieses auch umgekehrt stets eine Lösung ist. Also ist

$$\operatorname{Kern}\psi=\left\{\begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix}\;\middle|\;z\in\mathbb{R}\right\}=\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right].$$

Zur Bestimmung des Bilds kann man ebenfalls ausnutzen, daß die Differenz zwischen dritter und zweiter sowie zweiter und erster Komponente eines Vektors aus dem Bild gleich ist, d.h.

$$\operatorname{Bild}\psi\subseteq\left\{\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\;\middle|\;w-v=v-u\right\}=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\\2v-u\end{pmatrix}\;\middle|\;u,v\in\mathbb{R}\right\}=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right].$$

Wenn man beispielsweise nach einem Urbild mit dritter Komponente null sucht, sieht man schnell, daß

$$\psi\left(\begin{pmatrix}2v-3u\\2u-v\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(2v-3u)+2(2u-v)\\2(2v-3u)+3(2u-v)\\3(2v-3u)+4(2u-v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\\2v-u\end{pmatrix}$$

ist, das Bild ist also sogar *gleich* der rechtsstehenden Menge. (Wir werden bald Verfahren kennenlernen, mit denen man solche Probleme systematischer lösen kann.)

ω ist nicht linear, denn beispielsweise ist

$$\omega\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\omega\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6\\12\\8\end{pmatrix},$$

aber

$$\omega\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)+\omega\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\2\end{pmatrix}.$$

c) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $V=\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R})$?

$U_1=\{f\in V\mid f(t)=f(-t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$, $U_2=\{f\in V\mid f(t)=-f(-t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$,
$U_3=\{f\in V\mid f(t)=f(t^2) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$, $U_4=\{f\in V\mid f(t)=f(t+1) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$

Lösung: Seien $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ und f,g Elemente einer der vier betrachteten Mengen U_i. Da alle U_i zumindest die Nullfunktion enthalten, müssen wir nur prüfen, ob dann auch $\lambda f+\mu g$ in U_i liegt. Nach Definition der Vektorraumstruktion von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R})$ ist

$$(\lambda f+\mu g)(t)=\lambda f(t)+\mu g(t)\quad\text{für alle } t\in\mathbb{R}\,.$$

Entsprechend ist für $f,g\in U_1$

$$(\lambda f+\mu g)(-t)=\lambda f(-t)+\mu g(-t)=\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t)\,,$$

d.h. U_1 ist Untervektorraum. Genauso auch U_2, denn

$$\begin{aligned}-(\lambda f+\mu g)(-t)&=-\lambda f(-t)-\mu g(-t)=\lambda\cdot\big(-f(-t)\big)+\mu\cdot\big(-g(-t)\big)\\&=\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t)\,.\end{aligned}$$

Für U_3 haben wir

$$(\lambda f+\mu g)(t^2)=\lambda f(t^2)+\mu g(t^2)=\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t)\,,$$

auch das ist also ein Untervektorraum, genau wie U_4, denn liegen f,g in U_4, ist für alle $t\in\mathbb{R}$

$$(\lambda f+\mu g)(t+1)=\lambda f(t+1)+\mu g(t+1)=\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t)\,.$$

d) Zeigen Sie, daß $\varphi\colon\begin{cases}\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\,\mathbb{R})\to\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R})\\ f\mapsto f'\end{cases}$ eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie Kern und Bild!

Lösung: Da die Ableitung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion insbesondere stetig ist, definiert φ zunächst einmal überhaupt eine Abbildung von $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\,\mathbb{R})$ nach $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\,\mathbb{R})$. Mit der Linearität gibt es keine Probleme, da Differentiation eine lineare Operation ist:

$$(\lambda f+\mu g)'(t)=\lambda f'(t)+\mu g'(t)\,.$$

Im Kern liegen alle mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitung die Nullfunktion ist, also genau die konstanten Funktionen. Im Bild liegen die sämtlichen Ableitungen von mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen; diese sind immer noch mindestens einmal stetig differenzierbar, und da die Stammfunktion jeder mindestens einmal stetig differenzierbaren Funktion mindestens zweimal stetig differenzierbar ist, sind das auch die sämtlichen Bilder. Also ist $\operatorname{Bild}\varphi=\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\,\mathbb{R})$.

e) Zeigen Sie, daß $W=\{a\sin t+b\sin 2t+c\sin 4t\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi\colon\begin{cases}W\to\mathbb{R}^5\\ f\mapsto\left(f(0),f\left(\frac{\pi}{4}\right),f\left(\frac{\pi}{2}\right),f\left(\frac{3\pi}{4}\right),f(\pi)\right)\end{cases}\quad!$$

Lösung: Zunächst ist W ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, denn alle Funktionen der Bauart $a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ sind stetig und jede Linearkombination solcher Funktionen ist wieder von derselben Bauart:

$$\begin{aligned}\lambda\big(a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t\big) &+ \mu\big(a'\sin t + b'\sin 2t + c'\sin 4t\big)\\ &= (\lambda a + \mu a')\sin t + (\lambda b + \mu b')\sin 2t + (\lambda c + \mu c')\sin 4t\,.\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Linearität von φ empfiehlt sich, φ zunächst explizit auszurechnen. Die dazu benötigten Sinuswerte sind

$$\begin{array}{cccccccc} t & 0 & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{3\pi}{2} & 2\pi \\ \sin t & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & 0\,, \end{array}$$

und natürlich wissen wir, daß der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet. Somit ist

$$\varphi(a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t) = \begin{pmatrix} a\sin 0 + b\sin 0 + c\sin 0 \\ a\sin\frac{\pi}{4} + b\sin\frac{\pi}{2} + c\sin\pi \\ a\sin\frac{\pi}{2} + b\sin\pi + c\sin 2\pi \\ a\sin\frac{3\pi}{4} + b\sin\frac{3\pi}{2} + c\sin 3\pi \\ a\sin\pi + b\sin 2\pi + c\sin 4\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} + b \\ a \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} - b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Linearität von φ leicht einzusehen: Für zwei Skalare $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ und zwei Funktionen $f = a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t$ und $g = a'\sin t + b'\sin 2t + c'\sin 4t$ ist

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \varphi\big((\lambda a + \mu a')\sin t + (\lambda b + \mu b')\sin 2t + (\lambda c + \mu c')\sin 4t$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda a + \mu a')\frac{\sqrt{2}}{2} + (\lambda b + \mu b') \\ (\lambda a + \mu a') \\ (\lambda a + \mu a')\frac{\sqrt{2}}{2} - (\lambda b + \mu b') \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} + b \\ a \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} - b \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ a'\frac{\sqrt{2}}{2} + b' \\ a' \\ a'\frac{\sqrt{2}}{2} - b' \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)\,.$$

Wenn $a\frac{\sqrt{2}}{2} + b$ und $a\frac{\sqrt{2}}{2} - b$ beide verschwinden, verschwindet auch ihre Summe und ihre Differenz, und damit auch a und b. Der Kern von φ besteht daher genau aus den Funktionen der Form $c\sin 4t$ mit $c \in \mathbb{R}$, und

$$\operatorname{Bild}\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} + b \\ a \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} - b \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

f) Definiert die Vorschrift $\varphi(f) = \frac{df}{dt}$ eine lineare Abbildung von W nach W?

Lösung: *Nein,* denn die Ableitung von $f(t) = a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t$ ist $\frac{df}{dt}(t) = a\cos t + 2b\cos 2t + 4c\cos 4t$, und das liegt nicht in W, wir haben also nicht einmal eine Abbildung $W \to W$.

g) Wie steht es mit $\psi(f) = \frac{d^2f}{dt^2}$?

Lösung: Jetzt ist $\frac{d^2f}{dt^2} = -a\sin t - 4b\sin 2t - 16c\sin 4t$ wieder ein Element von W, also definiert ψ eine Abbildung $W \to W$. Nach den Regeln der Differentialrechnung ist für alle $f,g \in W$ und alle $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$

$$\psi(\lambda f + \mu g) = \frac{d^2}{dt^2}(\lambda f + \mu g) = \lambda\frac{d^2f}{dt^2} + \mu\frac{d^g}{dt^2} = \lambda\psi(f) + \mu\psi(g)\,,$$

die Abbildung ist also linear.

$\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ sei eine Teilmenge von V.

h) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$.

Lösung: *Falsch;* einfachstes Gegenbeispiel ist die Nullabbildung.

i) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$.

Lösung: *Richtig,* denn ist $\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$, so ist wegen $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ auch
$$\varphi\left(\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n\right) = \lambda_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(\vec{v}_n) = \vec{0},$$
also müssen wegen der linearen Unabhängigkeit der Bildvektoren alle λ_i verschwinden.

j) *Richtig oder falsch:* Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Lösung: *Richtig,* denn für *reelle* Zahlen λ, μ und $z, w \in \mathbb{C}$ ist
$$\overline{\lambda z + \mu w} = \overline{\lambda z} + \overline{\mu w} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z} + \overline{\mu} \cdot \overline{w} = \lambda\overline{z} + \mu\overline{w}\,.$$

k) *Richtig oder falsch:* Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Lösung: *Falsch;* beispielsweise ist für $\lambda = z = i$ zwar $\overline{\lambda z} = \overline{i^2} = -1$, aber $\overline{z} = i \cdot \overline{i} = +1$.

l) Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?
$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$
$$M_3 = \left\{\sin t, t, t^2\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_4 = \left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$
$$M_5 = \left\{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_6 = \left\{e^t, \sinh t, \cosh t\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Lösung: Im Falle von M_1 steigt der Eintrag bei jedem der drei Vektoren von Komponente zu Komponente jeweils um eins an, daher ist
$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$
Das erste Gleichheitszeichen führt zur nichttrivialen Darstellung des Nullvektors
$$2\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \vec{0},$$
die drei Vektoren sind also linear abhängig.
Im Fall von M_2 führt die Gleichung
$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu+\nu\\2\mu+2\nu\\3\nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
(rückwärts) auf das lineare Gleichungssystem
$$3\nu = 0, \quad 2\mu + 2\nu = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 0\,,$$

das offensichtlich nur die triviale Lösung $\lambda = \mu = \nu = 0$ hat; M_2 ist also linear unabhängig.

Da der Sinus kein Polynom ist, vermutet man, daß auch M_3 linear unabhängig ist, d.h. aus

$$\lambda \sin t + \mu t + \nu t^2 = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

sollte folgen, daß $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist. Einsetzen von $t = \pi$ zeigt, daß für so eine Darstellung $\mu\pi + \nu\pi^2 = 0$ sein müßte, also $\mu = -\pi\nu$. Für $t = -\pi$ dagegen folgt $-\mu\pi + \nu\pi^2 = 0$ also $\mu = \nu\pi$, und das kann nur für $\mu = \nu = 0$ beides gelten. Da der Sinus nicht identisch verschwindet, muß dann auch $\lambda = 0$ sein, die drei Funktionen sind also linear unabhängig.

Falls für Elemente $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda e^t + \mu e^{2t} + \nu e^{3t} \equiv 0$$

ist, hat das kubische Polynom $\lambda X + \mu X^2 + \nu X^3$ unendlich viele Nullstellen, muß also das Nullpolynom sein. Daher ist auch M_4 linear unabhängig.

Nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist $e^{x+1} = ee^x$; daher zeigt bereits die Gleichung

$$e^{x+1} - ee^x \equiv 0$$

die lineare Abhängigkeit von M_5.

Die Definitionen $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ zeigen, daß

$$\sinh t + \cosh t = e^t, \quad \text{d.h.} \quad \sinh t + \cosh t - e^t \equiv 0\,.$$

Somit ist auch M_6 linear abhängig.

m) Richtig oder falsch: Ist M ein Erzeugendensystem von V und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist $\varphi(M) = \big\{\varphi(\vec{v}) \bigm| \vec{v} \in M\big\}$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild}\varphi$.

Lösung: *Richtig,* denn zu jedem Vektor $\vec{w} \in \operatorname{Bild}\varphi$ gibt es ein Urbild $\vec{v} \in V$, das sich nach Voraussetzung als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r$$

von Elementen aus M schreiben läßt. Dann ist aber

$$\vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \varphi\big(\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r\big) = \lambda_1 \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \lambda_r \varphi(\vec{b}_r)$$

Linearkombination von Elementen aus $\varphi(M)$.