Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 5. März 2007

a) *Richtig oder falsch:* Sind $\varphi, \psi\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so sind auch die Abbildungen $\varphi \pm \psi\colon V \to W$ mit $(\varphi \pm \psi)(\vec v) = \varphi(\vec v) \pm \psi(\vec v)$ linear.

b) Welche der folgenden Vorschriften definiert eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$? Was sind dann Kern und Bild?

$$\pi_0\big((x,y,z)\big) = (x,y,0)\,, \qquad \pi_1\big((x,y,z)\big) = (x,y,1)\,,$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y\\ y+2z\\ z+2\end{pmatrix},\ \psi\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y+3z\\ 2x+3y+4z\\ 3x+4y+5z\end{pmatrix},\ \omega\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z\\ xy+yz+xz\\ xyz\end{pmatrix}$$

c) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $V = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

$U_1 = \big\{f \in V \bigm| f(t) = f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\big\}$, $U_2 = \big\{f \in V \bigm| f(t) = -f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\big\}$,
$U_3 = \big\{f \in V \bigm| f(t) = f(t^2) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\big\}$, $U_4 = \big\{f \in V \bigm| f(t) = f(t+1) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\big\}$

d) Zeigen Sie, daß $\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie Kern und Bild!

e) Zeigen Sie, daß $W = \big\{a \sin t + b \sin 2t + c \sin 4t \bigm| a,b,c \in \mathbb{R}\big\}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist, und bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} W \to \mathbb{R}^5 \\ f \mapsto \left(f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{3\pi}{4}\right), f(\pi)\right) \end{cases} !$$

f) Definiert die Vorschrift $\varphi(f) = \frac{df}{dt}$ eine lineare Abbildung von W nach W?

g) Wie steht es mit $\psi(f) = \frac{d^2f}{dt^2}$?

$\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ sei eine Teilmenge von V.

h) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$ linear unabhängig, so auch $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$.

i) *Richtig oder falsch:* Ist $\{\varphi(\vec v_1), \dots, \varphi(\vec v_n)\}$ linear unabhängig, so auch $\{\vec v_1, \dots, \vec v_n\}$.

j) *Richtig oder falsch:* Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

k) *Richtig oder falsch:* Betrachtet man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, ist die komplexe Konjugation eine lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

l) Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad M_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \{\sin t, t, t^2\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_4 = \{e^t, e^{2t}, e^{3t}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

$$M_5 = \{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_6 = \{e^t, \sinh t, \cosh t\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

m) *Richtig oder falsch:* Ist M ein Erzeugendensystem von V und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist $\varphi(M) = \{\varphi(\vec v) \mid \vec v \in M\}$ ein Erzeugendensystem von Bild φ.