WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 26. Februar 2007

a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = i(1-i),\ \ z_2 = (3+i)(3-i),\ \ z_3 = (i+1)(i-1),\ \ z_4 = i^{2007},\ \ z_5 = \dfrac{5+2i}{2+3i},\ \ z_6 = \dfrac{4+i}{2-i}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
z_1 &= i(1-i) = i\cdot 1 - i\cdot i = i-(-1) = 1+i\\
z_2 &= (3+i)(3-i) = 3^2 - i^2 = 9-(-1) = 10\\
z_3 &= (i+1)(i-1) = i^2 - 1^2 = -1-1 = -2\\
z_4 &= i^{2007} = i^3\cdot i^{2004} = -i\cdot(i^2)^{1002} = -i\cdot(-1)^{1002} = -i\cdot 1^{501} = -i\\
z_5 &= \frac{5+2i}{2+3i} = \frac{(5+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10-2\cdot(-3)-15i+4i}{2^2+3^2} = \frac{16}{13} - \frac{11}{13}i\\
z_6 &= \frac{4+i}{2-i} = \frac{(4+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8-1+4i+2i}{2^2+1^2} = \frac{7}{5} + \frac{6}{5}i
\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie für $z = \sqrt{3}+i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und z^{2007} sowie den Betrag!

Lösung:

$$\begin{aligned}
z^2 &= (\sqrt{3}+i)^2 = (\sqrt{3})^2 + i^2 + 2\sqrt{3}\,i = 2 + 2\sqrt{3}\,i\\
z^3 &= z^2\cdot z = (2+2\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3}\sqrt{3}\,i = 8i\\
z^4 &= z^3\cdot z = 8i\cdot(\sqrt{3}+i) = 8\sqrt{3}\,i - 8i^2 = -8 + 8\sqrt{3}\,i\\
z^{16} &= z^{15}\cdot z = (z^3)^5\cdot z = (8i)^5\cdot(\sqrt{3}+i) = 8^5 i^5\cdot(\sqrt{3}+i) = -2^{15} + 2^{15}\sqrt{3}\,i\\
z^{256} &= z^{255}\cdot z = (z^3)^{85} = (8i)^{85}\cdot(\sqrt{3}+i) = 2^{255} i\cdot(\sqrt{3}+i) = -2^{255} + 2^{255}\sqrt{3}\,i\\
z^{2007} &= (z^3)^{669} = (8i)^{669} = 2^{2007}\cdot i^{669} = -2^{2007} i
\end{aligned}$$

= -14696072899510457910180264975074329395485666586735298566113827031369808145822340017365
241424851280254956108347379039523500123122699047108242251921358933160773008638610599971
840088163730974725743542902654728126239332046779346737710585256579333179693308275839559
444787047544912589519783891140629020412202583212053620350010688717104574055412999539319
651392054912347738448106306817040926244005345442289064602444671410741520258787821875717
396461207456197233847539467765831034596299478021012490490523728714592688694474716929987
628644661687302977141155300336976022455747686505323874664699578081559660947075760128i

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - i^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

c) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = -1$!

Lösung: Aus der vorigen Aufgabe wissen wir, daß für $z_0 = (\sqrt{3}+i)$ gilt $z_0^3 = 8i$, also $(z_0^2)^3 = z_0^6 = -64 = -4^3$. Somit hat $\frac{1}{4}z_0^2 = \frac{2+2\sqrt{3}\,i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ dritte Potenz -1.

d) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = \ \ 1$!

Lösung: Da $(-z)^3 = -z^3$ für jede komplexe Zahl z, können wir einfach $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ setzen.

e) Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$!

Lösung: $z\cdot\overline{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$

f) Richtig oder falsch: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

Lösung: *Richtig,* denn für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ ist
$$\overline{z+w} = \overline{(x+u) + i(y+v)} = (x+u) - i(y+v) = (x - iy) + (u - iv) = \overline{z} + \overline{w}\,.$$

g) Richtig oder falsch: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Lösung: *Richtig,* denn für $z = x + iy$ und $w = u + iv$ ist
$$\overline{zw} = \overline{(xu - yv) + i(xv + yu)} = (xu - yv) - i(xv + yu)$$
und auch
$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (x - iy)(u - iv) = (xu - yv) - i(xv + yu)\,.$$

h) Bestimmen Sie für $f(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!

Lösung: Für gerade $k = 2\ell$ ist $(ix)^k = i^k x^k = (-1)^\ell x^k$, für ungerade $k = 2\ell + 1$ ist $(ix)^k = i^k x^k = i \cdot (-1)^\ell x^k$. Somit ist
$$f(ix) = \sum_{\ell=0}^{[n/2]} (-1)^\ell x^{2\ell} + i \sum_{\ell=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^\ell x^{2\ell+1}\,.$$

i) Welche der folgenden Mengen sind, mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen bzw. reeller Funktionen, Körper?
$$k_1 = \mathbb{N}_0\,, \quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad k_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad k_4 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\},$$
$$k_5 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_7 = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Lösung: k_1 ist kein Körper, da beispielsweise das Element zwei weder ein additives noch ein multiplikatives Inverses hat. k_2 ist schon deshalb keiner, weil die Null und die Eins beide rational sind; in k_3 gibt es keine additiven Inversen. Auch k_4 ist schon deshalb kein Körper, weil diese Menge kein Nullelement enthält.

k_5 ist ein Körper, denn $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$ und $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ liegen wieder in k_5, genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}\,.$$
Aus demselben Grund ist auch k_6 ein Körper: $(a + b\sqrt{2}) \pm (c + d\sqrt{2}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{2}$ und $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ liegen wieder in k_6, genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch
$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}\,,$$
denn wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ kann der Nenner dann nicht verschwinden.

k_7 schließlich ist kein Körper, denn beispielsweise liegt $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ nicht in k_7. (Das ist allerdings schon im wesentlichen die einzige Ausnahme:
$k_8 = \left\{a + b\sqrt[3]{3} + c\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$ ist ein Körper!)

j) Richtig oder falsch: Ist k ein Körper, so wird auch $k \times k$ mit der Addition $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$ und der Multiplikation $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$ zum Körper.

Lösung: *Falsch,* denn beispielsweise haben $(1,0)$ und $(0,1)$ keine multiplikativen Inversen.

k) Bestimmen Sie den Wert des Polynoms $f(x) = x^{10} + x^5 + x^3 + 1$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$!

Lösung: Für $x = 0$ erhalten wir $f(0) = 1$, für $x = 1$ ist $f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$.

l) Was ändert sich, wenn in der Definition von f eines der Pluszeichen durch ein Minuszeichen ersetzt wird?

Lösung: *Nichts,* denn jedes Element von $\mathbb{F}_2$ ist sein eigenes Negatives: $0+0 = 1+1 = 0$.

m) Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}, \quad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy = 0 \right\},$$

$$V_5 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 0 \right\}, \qquad V_6 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 2 \right\}$$

($\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.)

Lösung: V_1 ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, und für zwei reelle Zahlen λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u \\ u+v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ \lambda(x+y) + \mu(u+v) \\ \lambda y + \mu v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ (\lambda x + \mu u) + (\lambda y + \mu v) \\ \lambda y + \mu v \end{pmatrix} \in V_1,$$

V_1 ist also Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ und damit insbesondere selbst ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

V_2 und V_3 sind keine Vektorräume; beispielsweise enthalten beide keinen Nullvektor. (Es gibt auch sonst noch viele Eigenschaften, die nicht erfüllt sind.)

Auch V_4 ist ***kein*** Vektorraum: Beispielsweise liegen $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ beide in V_4, nicht aber ihre Summe $\binom{1}{1}$.

V_5 ist Teilmenge des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und für $f, g \in V_5$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ liegt auch $\lambda f + \mu g$ in V_5, denn $(\lambda f + \mu g)'(2) = \lambda f'(2) + \mu g'(2) = 0 + 0 = 0$. Genauso sieht man, daß V_6 ***kein*** Vektorraum ist: Für $f, g \in V_6$ ist $(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 2 + 2 = 4$, d.h. $f + g \notin V_6$.

n) Bestimmen Sie alle Elemente der folgenden Mengen und geben Sie an, welche dieser Mengen ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist!

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{F}_2, \; x(y+z) = 0 \right\},$$

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{F}_2, \; x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

Lösung: V_1 ist aus demselben Grund wie bei der vorigen Aufgabe ein Untervektorraum. Als Menge ist

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Bedingung $x(y+z)=0$ ist genau dann erfüllt, wenn $x=0$ oder $y+z=0$ ist. In $\mathbb{F}_2$ ist $y+z=0$ äquivalent zu $y=z$. Daher ist

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\},$$

und das ist kein Vektorraum, da beispielsweise die Summe

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

nicht in V_2 liegt.

$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

ist kein Vektorraum, da beispielsweise die Summe

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

nicht in V_3 liegt. Da jedes der beiden Elemente von $\mathbb{F}_2$ gleich seinem Quadrat ist, können wir die Bedingung $x^2+y^2+z^2=0$ vereinfachen zu $x+y+z=0$ oder auch $z=x+y$. Da diese Bedingung bei der Addition und bei der Multiplikation mit einem Skalar erhalten bleibt, ist

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

ein Vektorraum.

o) *Richtig oder falsch:* Ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum, so wird auch $V \times V$ zu einem k-Vektorraum mit Vektorraddition $(\vec{u},\vec{v})+(\vec{w},\vec{z}) = (\vec{u}+\vec{w},\vec{v}+\vec{z})$ und Skalarmultiplikation $\lambda(\vec{u},\vec{v}) = (\lambda\vec{u},\lambda\vec{v})$.

Lösung: *Richtig:* Alle Vektorraumaxiome können einfach komponentenweise nachgerechnet werden.