Wolfgang K. Seiler — A5, Zimmer C 201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 26. Februar 2007

a) Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:
$z_1 = i(1-i),\ \ z_2 = (3+i)(3-i),\ \ z_3 = (i+1)(i-1),\ \ z_4 = i^{2007},\ \ z_5 = \dfrac{5+2i}{2+3i},\ \ z_6 = \dfrac{4+i}{2-i}$

b) Berechnen Sie für $z = \sqrt{3}+i$ die Potenzen $z^2, z^3, z^4, z^{16}, z^{256}$ und z^{2007} sowie den Betrag!

c) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = -1$!

d) Finden Sie eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z^3 = \ \ 1$!

e) Zeigen Sie: Für eine komplexe Zahl vom Betrag eins ist $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$!

f) Richtig oder falsch: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

g) Richtig oder falsch: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

h) Bestimmen Sie für $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k$ Realteil und Imaginärteil von $f(ix)$ für $x \in \mathbb{R}$!

i) Welche der folgenden Mengen sind, mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen bzw. reeller Funktionen, Körper?

$$k_1 = \mathbb{N}_0,\quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\quad k_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ge 0\right\},\quad k_4 = \left\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\right\},$$
$$k_5 = \left\{a + bi \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\},\quad k_6 = \left\{a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\},\quad k_7 = \left\{a + b\sqrt[3]{3} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

j) Richtig oder falsch: Ist k ein Körper, so wird auch $k \times k$ mit der Addition $(x, y)+(u, v) = (x + u, y + v)$ und der Multiplikation $(x, y)(u, v) = (xu, yv)$ zum Körper.

k) Bestimmen Sie den Wert des Polynoms $f(x) = x^{10} + x^5 + x^3 + 1$ für alle $x \in \mathbb{F}_2$!

l) Was ändert sich, wenn in der Definition von f eines der Pluszeichen durch ein Minuszeichen ersetzt wird?

m) Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy = 0 \right\},$$
$$V_5 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, f'(2) = 0 \right\}, \qquad V_6 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,\middle|\, f'(2) = 2 \right\}$$

($\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist die Menge aller stetig differenzierbarer Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.)

n) Bestimmen Sie alle Elemente der folgenden Mengen und geben Sie an, welche dieser Mengen ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist!

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{F}_2,\ \ x(y+z) = 0 \right\},$$
$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{F}_2,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

o) Richtig oder falsch: Ist k ein Körper und V ein k-Vektorraum, so wird auch $V \times V$ zu einem k-Vektorraum mit Vektorraddition $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{z})$ und Skalarmultiplikation $\lambda(\vec{u}, \vec{v}) = (\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})$.