Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik I

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Sommersemester 2007

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung erscheinen. Es ist daher in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich wohl leider nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Übungsgruppenleiter. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Biographische Angaben von Mathematikern beruhen größtenteils auf den entsprechenden Artikeln im *MacTutor History of Mathematics archive* (`www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/`), von wo auch die meisten abgedruckten Bilder stammen. Bei noch lebenden Mathematikern bezog ich mich, soweit möglich, auf deren eigenen Internetauftritt.

Inhalt

Einleitung 1

Literaturhinweise 4

KAPITEL I: VEKTORRÄUME UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME 9

§1: Zahlen und Körper 10
a) Von den natürlichen zu den komplexen Zahlen 10
b) Der Begriff des Körpers 13
c) Mehr über komplexe Zahlen 16
d) Weitere Körper 18
e) Der Körper mit zwei Elementen 19

§2: Vektoren und Vektorräume 21
a) Vektoren in der Ebene und im Raum 21
b) Definition des Vektorraums 25
c) Erste Beispiele 27
d) Lineare Abbildungen 30
e) Untervektorräume 33
f) Lineare Abhängigkeit 36
g) Die Dimension eines Vektorraums 44
h) Basen 45
i) Dimensionen und lineare Abbildungen 54

§3: Vektorräume und endliche Körper 56
a) Bitfolgen als Vektoren 57
b) Körper von Primzahlordnung 62
c) Der EUKLIDische Algorithmus 64
d) Das RSA-Verfahren 72
1) Verschlüsselung 83
2) Identitätsnachweis 84
3) Elektronische Unterschriften 84
4) RSA bei SSL/TLS 86
5) Blinde Unterschriften und elektronisches Bargeld 87
5) Größenordnung der Primzahlen 89
e) Das Verfahren von DIFFIE und HELLMAN 92
f) Körper von Zweipotenzordnung 96
g) Der EUKLIDische Algorithmus für Polynome 101
f) Der Körper mit 256 Elementen und CD-Fehlerkorrektur 106
g) Der Körper mit 256 Elementen in der Kryptographie 109

§3: Matrizen und lineare Gleichungssysteme 110
a) Abbildungsmatrizen 110
b) Rechenregeln für Matrizen 113
c) Matrixdarstellung der komplexen Zahlen 123
d) Das GAUSSsche Eliminationsverfahren 126
e) Erste Beispiele 128
f) Die Struktur der Lösungsmenge 142
g) Affine Räume 148
h) Ausblick: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme ... 160
i) Matrixgleichungen und die Berechnung der Inversen 167
j) Spezielle Matrizen 171
1) Diagonalmatrizen 171
2) Dreiecksmatrizen 172
3) Matrizen mit nur einem Eintrag 176
4) Permutationen und Permutationsmatrizen 178
k) Die LR-Zerlegung einer Matrix 182

§4: Basiswechsel, Eigenvektoren und Determinanten 188
a) Eigenwerte und Eigenvektoren 188
b) Beispiel eines Basiswechsels 190
c) Basiswechsel im allgemeinen Fall 196
d) Forderungen an eine Determinante 202

e) Gerade und ungerade Permutationen 205
f) Existenz von Determinanten 210
g) Die Determinante einer Matrix 215
h) Der Entwicklungssatz von LAPLACE 222
i) Determinanten und Eigenwerte 231
j) Der PageRank von Google als Beispiel eines Eigenvektors 236
k) Die CRAMERsche Regel 247
l) Geschichte und Anwendungen von Determinanten 249

§5: EUKLIDische und iHERMITEsche Vektorräume 250
a) Längen und Winkel in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ 251
b) EUKLIDische Vektorräume 255
c) HERMITEsche Vektorräume 260
d) Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung 264
e) Orthonormalbasen 266
f) Die QR-Zerlegung einer Matrix 273
g) Orthogonale und unitäre Matrizen 279
h) Orthogonale Projektionen 283
i) Die Methode der kleinsten Quadrate 288
j) EUKLIDische Vektorräume in der Informationssuche 304

KAPITEL II: MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS 309

§1: Funktionen und ihre Eigenschaften 309
a) Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen 309
b) Normierte Vektorräume 312
c) Die Ableitung einer Funktion 322
d) TAYLOR-Reihen 343
e) Der Satz über implizite Funktionen 348

§2: Vektorfelder 353
a) Der Begriff des Vektorfelds 356
b) Die JACOBI-Matrix 356
c) Die Divergenz eines Vektorfelds 357
d) Vektorprodukt und Rotation im Dreidimensionalen 360
e) Erste Beispiele 369
1) Das elektrische Feld einer Punktladung 369
2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters 371
f) Allgemeine Rechenregeln 374
g) Nichtkartesische Koordinatensysteme 377
1) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$ 377
2) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ 380
3) Kugelkoordinaten 381

§3: Integralrechnung 384
a) Heuristische Vorüberlegungen 384
1) Integration als Umkehrung der Differentiation 384
2) Integration als Flächenbestimmung 390
3) Integration als Durchschnittsbestimmung 391
b) Integration elementarer Funktionen 392
1) Die Funktion $f(x) = x^2$ 393
2) Die Exponentialfunktion 394
3) Die DIRICHLETsche Sprungfunktion 396
c) Definition des RIEMANN-Integrals 397
1) Warum lohnt sich ein allgemeinerer Ansatz? 398
2) Wo sollte der bisherige Ansatz modifiziert werden? 398
3) Anwendung des Mittelwertsatzes 401
4) Gleichmäßige Stetigkeit 402
5) Definition einer Approximation für das Integral 405
6) Existenz des RIEMANN-Integrals für stetige Funktionen 408
7) Stückweise stetige Funktionen 414
8) Noch einmal die DIRICHLETsche Sprungfunktion 415
9) Ausblick: Das LEBESGUE-Integral 415
10) Anwendung auf Flächeninhalte 416
d) Erste Integrationsregeln 417
1) Monotonieregel 417
2) Linearität und Zusammensetzung 419
3) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung 419
e) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 421

f) Trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen 424
g) Partielle Integration 436
h) Substitutionsregel 437
1) Der Spezialfall logarithmischer Ableitungen 437
2) Substitutionen mit linearen Funktionen 438
3) Substitutionen mit trigonometrischen und Hyperbelfunktionen 440
4) Integrale der Form $\int h(e^{ax})\,dx$ 442
5) Integrale der Form $\int h(\sin x, \cos x)\,dx$ 444
i) Integration rationaler Funktionen 445
j) Symmetrie 450
k) Einige nicht elementar integrierbare Funktionen 451
1) Der Integralsinus 452
2) Die Fehlerfunktion 452
3) Elliptische Integrale 453
4) Algebraische Integrale 454
l) Uneigentliche Integrale 454

§4: Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^n$ 465
a) Kurven und Tangentenvektoren 465
b) Die Bogenlänge einer Kurve 468
c) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve 473
d) Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder 478

§5: Mehrdimensionale Integrationstheorie 484
a) Flächeninhalte und Volumina 484
b) Integration über Normalbereiche 492
c) Die Transformationsformel 498
d) Der Satz von GREEN und der ebene Satz von GAUSS 509
e) Oberflächenintegrale 515
f) Die Sätze von STOKES und GAUSS 526