

Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik I

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Sommersemester 2007

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung erscheinen. Es ist daher in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehungsweise nicht nur möglich, sondern **sticher**. Dabei handelt es sich wohl leider nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihren Übungsgruppenleiter. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Biographische Angaben von Mathematikern beruhen größtenteils auf den entsprechenden Artikeln im *MacTutor History of Mathematics archive* (www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/), von wo auch die meisten abgedruckten Bilder stammen. Bei noch lebenden Mathematikern bezog ich mich, soweit möglich, auf deren eigenen Internetauftritt.

d) Das RSA-Verfahren	72
1) Verschlüsselung	83
2) Identitätsnachweis	84
3) Elektronische Unterschriften	84
4) RSA bei SSL/TLS	86
5) Blinde Unterschriften und elektronisches Bargeld	87
5) Größenordnung der Primzahlen	89
e) Das Verfahren von DIFFIE und HELLMAN	92
f) Körper von Zweipotenzordnung	96
g) Der EUKLIDISCHE Algorithmus für Polynome	101
f) Der Körper mit 256 Elementen und CD-Fehlerkorrektur	106
g) Der Körper mit 256 Elementen in der Kryptographie	109
§3: Matrizen und lineare Gleichungssysteme	110
a) Abbildungsmatrizen	110
b) Rechenregeln für Matrizen	113
c) Matrixdarstellung der komplexen Zahlen	123
d) Das GAUSSSCHE Eliminationsverfahren	126
e) Erste Beispiele	128
f) Die Struktur der Lösungsmenge	142
g) Affine Räume	148
h) Ausblick: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme	160
i) Matrixgleichungen und die Berechnung der Inversen	167
j) Spezielle Matrizen	171
1) Diagonalmatrizen	171
2) Dreiecksmatrizen	172
3) Matrizen mit nur einem Eintrag	176
4) Permutationen und Permutationsmatrizen	178
k) Die LR-Zerlegung einer Matrix	182
§4: Basiswechsel, Eigenvektoren und Determinanten	188
a) Eigenwerte und Eigenvektoren	188
b) Beispiel eines Basiswechsels	190
c) Basiswechsel im allgemeinen Fall	196
d) Forderungen an eine Determinante	202

Inhalt

Einleitung	1
Literaturhinweise	4
KAPITEL I: VEKTORRÄUME UND LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME	9
§1: Zahlen und Körper	10
a) Von den natürlichen zu den komplexen Zahlen	10
b) Der Begriff des Körpers	13
c) Mehr über komplexe Zahlen	16
d) Weitere Körper	18
e) Der Körper mit zwei Elementen	19
§2: Vektoren und Vektorräume	21
a) Vektoren in der Ebene und im Raum	21
b) Definition des Vektorraums	25
c) Erste Beispiele	27
d) Lineare Abbildungen	30
e) Untervektorräume	33
f) Lineare Abhängigkeit	36
g) Die Dimension eines Vektorraums	44
h) Basen	45
i) Dimensionen und lineare Abbildungen	54
§3: Vektorräume und endliche Körper	56
a) Bitfolgen als Vektoren	57
b) Körper von Primzahlordnung	62
c) Der EUKLIDISCHE Algorithmus	64

e) Gerade und ungerade Permutationen	205
f) Existenz von Determinanten	210
g) Die Determinante einer Matrix	215
h) Der Entwicklungssatz von LAPLACE	222
i) Determinanten und Eigenwerte	231
j) Der PageRank von Google als Beispiel eines Eigenvektors	236
k) Die CRAMERSche Regel	247
l) Geschichte und Anwendungen von Determinanten	249
§5: EUKLIDISCHE und iHERMITISCHE Vektorräume	250
a) Längen und Winkel in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	251
b) EUKLIDISCHE Vektorräume	255
c) HERMITISCHE Vektorräume	260
d) Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung	264
e) Orthonormalbasen	266
f) Die QR-Zerlegung einer Matrix	273
g) Orthogonale und unitäre Matrizen	279
h) Orthogonale Projektionen	283
i) Die Methode der kleinsten Quadrate	288
j) EUKLIDISCHE Vektorräume in der Informationssuche	304

KAPITEL II: MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS

§1: Funktionen und ihre Eigenschaften	309
a) Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen	309
b) Normierte Vektorräume	312
c) Die Ableitung einer Funktion	322
d) TAYLOR-Reihen	343
e) Der Satz über implizite Funktionen	348
§2: Vektorfelder	353
a) Der Begriff des Vektorfelds	356
b) Die JACOBI-Matrix	356
c) Die Divergenz eines Vektorfelds	357
d) Vektorprodukt und Rotation im Dreidimensionalen	360

e) Erste Beispiele	369
1) Das elektrische Feld einer Punktladung	369
2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters	371
f) Allgemeine Rechenregeln	374
g) Nichtkartesische Koordinatensysteme	377
1) Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2	377
2) Zylinderkoordinaten im \mathbb{R}^3	380
3) Kugelkoordinaten	381
§3: Integralrechnung	384
a) Heuristische Vorüberlegungen	384
1) Integration als Umkehrung der Differentiation	384
2) Integration als Flächenbestimmung	390
3) Integration als Durchschnitbestimmung	391
b) Integration elementarer Funktionen	392
1) Die Funktion $f(x) = x^2$	393
2) Die Exponentialfunktion	394
3) Die DIRICHLETSche Sprungfunktion	396
c) Definition des RIEMANN-Integrals	397
1) Warum lohnt sich ein allgemeinerer Ansatz?	398
2) Wo sollte der bisherige Ansatz modifiziert werden?	398
3) Anwendung des Mittelwertsatzes	401
4) Gleichmäßige Stetigkeit	402
5) Definition einer Approximation für das Integral	405
6) Existenz des RIEMANN-Integrals für stetige Funktionen	408
7) Stückweise stetige Funktionen	414
8) Noch einmal die DIRICHLETSche Sprungfunktion	415
9) Ausblick: Das LEBESGUE-Integral	415
10) Anwendung auf Flächeninhalte	416
d) Erste Integrationsregeln	417
1) Monotonieregel	417
2) Linearität und Zusammensetzung	419
3) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung	419
e) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	421

f) Trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen	424
g) Partielle Integration	436
h) Substitutionsregel	437
1) Der Spezialfall logarithmischer Ableitungen	437
2) Substitutionen mit linearen Funktionen	438
3) Substitutionen mit trigonometrischen und Hyperbelfunktionen	440
4) Integrale der Form $\int h(e^{ax}) dx$	442
5) Integrale der Form $\int h(\sin x, \cos x) dx$	444
i) Integration rationaler Funktionen	445
j) Symmetrie	450
k) Einige nicht elementar integrierbare Funktionen	451
1) Der Integralsinus	452
2) Die Fehlerfunktion	452
3) Elliptische Integrale	453
4) Algebraische Integrale	454
l) Uneigentliche Integrale	454
§4: Kurvenintegrale im \mathbb{R}^n	465
a) Kurven und Tangentenvektoren	465
b) Die Bogenlänge einer Kurve	468
c) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve	473
d) Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder	478
§5: Mehrdimensionale Integrationstheorie	484
a) Flächeninhalte und Volumina	484
b) Integration über Normalbereiche	492
c) Die Transformationsformel	498
d) Der Satz von GREEN und der ebene Satz von GAUSS	509
e) Oberflächenintegrale	515
f) Die Sätze von STOKES und GAUSS	526