

18. Mai 2007

11. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) Die Niveaulinien $N_a(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = a\}$ der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zu den Funktionswerten $a \in \mathbb{R}$ seien die Geraden $y = a - x$. Was ist f ?
- 2) Der Graph $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y) = z\}$ der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit Koordinaten x, y in \mathbb{R}^2 und z in \mathbb{R} sei die Fläche, die aus der Parabel $z = 1 - x^2$ durch Rotation um die z -Achse entsteht. Was ist f ?
- 3) *Richtig oder falsch:* $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $f \circ g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar und $J_{f \circ g}(\mathbf{x}) = J_g(\mathbf{x}) \cdot J_f(g(\mathbf{x}))$.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die partielle Ableitung f_{xy} von $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ verschwindet genau dann überall, wenn es Funktionen $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gibt, so daß $f(x, y) = g(x) + h(y)$ ist.
- 5) Finden Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$!

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Zu jedem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{v}| = 1$ gibt es einen Winkel α , so daß $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ist!
- b) Zeigen Sie: Zu jeder orthogonalen 2×2 -Matrix $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ gibt es einen Winkel φ , so daß $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ oder $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ ist! (*Hinweis:* Verwenden Sie die Additionsregeln für trigonometrische Funktionen!)
- c) Bestimmen Sie alle unitären 1×1 -Matrizen!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Find the biggest domain $D \subseteq \mathbb{R}^3$ such that $f: \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x \cdot e^{xy/z} \end{cases}$ defines a function!
- b) What is the derivative of f ?
- c) Calculate the HESSE-matrix of f !

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades für die Funktion

- a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto e^{x^2+y^3}$
- b) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \ln(x + \cos^2 y)$

Abgabe bis zum Freitag, dem 25. Mai 2007, um 12.00 Uhr