Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

11. Mai 2007

10. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

U sei ein Untervektorraum eines EUKLIDischen Vektorraums V und $\pi_U\colon V \to U$ die orthogonale Projektion auf U.

1) *Richtig oder falsch:* Für einen Vektor $\vec{v} \in V$ ist $|\vec{v}| = |\pi_U(\vec{v})|$ genau dann, wenn $\vec{v}$ in U liegt.

2) *Richtig oder falsch:* Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ ist $\vec{v} \cdot \vec{v}' = \pi_U(\vec{v}) \cdot \pi_U(\vec{v}')$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{v}'$ in U liegen

3) Was ist $(\pi_{U^\perp} \circ \pi_U)(\vec{v})$?

4) Was ist $\pi_U\left(\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\right)$ für $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \left\{\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}$?

Aufgabe 1: **(***6 Punkte***)**

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des durch $x+y+z = 0$ definierten Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$ mit seinem Standardskalarprodukt!

b) Der Vektorraum $\mathbb{C}^5$ sei mit seinem üblichen HERMITEschen Produkt versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2i\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-2-2i\\-4i\\4+i\\0\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}-4-i\\0\\4+2i\\4\\4+i\end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraums!

Aufgabe 2: **(***4 Punkte***)**
V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei.

a) Zeigen Sie: Durch $(f, g) \underset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V!

Aufgabe 3: **(***5 Punkte***)**
Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 18. Mai 2007, um 12.00 Uhr