

11. Mai 2007

10. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

U sei ein Untervektorraum eines EUKLIDISCHEN Vektorraums V und $\pi_U: V \rightarrow U$ die orthogonale Projektion auf U .

- 1) *Richtig oder falsch:* Für einen Vektor $\vec{v} \in V$ ist $|\vec{v}| = |\pi_U(\vec{v})|$ genau dann, wenn \vec{v} in U liegt.
- 2) *Richtig oder falsch:* Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ ist $\vec{v} \cdot \vec{v}' = \pi_U(\vec{v}) \cdot \pi_U(\vec{v}')$ genau dann, wenn \vec{v} und \vec{v}' in U liegen
- 3) Was ist $(\pi_{U^\perp} \circ \pi_U)(\vec{v})$?
- 4) Was ist $\pi_U \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ für $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$?

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des durch $x+y+z=0$ definierten Untervektorraums von \mathbb{R}^3 mit seinem Standardskalarprodukt!
- b) Der Vektorraum \mathbb{C}^5 sei mit seinem üblichen HERMITESCHEN Produkt versehen. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2-2i \\ -4i \\ 4+i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -4-i \\ 0 \\ 4+2i \\ 4 \\ 4+i \end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraums!

Aufgabe 2: (4 Punkte)

V sei der \mathbb{R} -Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei.

- a) Zeigen Sie: Durch $(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ wird ein Skalarprodukt auf V definiert.
- b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V !

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$!