WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

4. Mai 2007

9. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ seien zwei Vektoren der Länge zwei; die Länge von $\vec{v}+\vec{w}$ sei drei. Was ist $\vec{v}\cdot\vec{w}$?

2) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^3$ seien zwei Vektoren der Länge zwei; die Länge von $\vec{v}+\vec{w}$ sei drei. Was können Sie über $\vec{v}\cdot\vec{w}$ sagen?

3) *Richtig oder falsch:* V sei ein EUKLIDischer Vektorraum, und für zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ sei $\vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w}$ für alle $\vec{w} \in V$. Dann ist $\vec{u} = \vec{v}$.

4) *Richtig oder falsch:* Die Multiplikation reeller Zahlen macht $\mathbb{R}$ zu einem EUKLIDischen Vektorraum.

5) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $(z, w) \mapsto |zw|$ macht $\mathbb{C}$ zu einem HERMITEschen Vektorraum.

6) *Richtig oder falsch:* $\mathbb{C}$ mit dem Produkt

$$(x+iy)\odot(u+iv) = (xu-4yv) + 2i(xv-yu) \quad \text{für} \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

ist ein HERMITEscher Vektorraum.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$!

b) Hat $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus Eigenvektoren von A?

c) Wählen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, die möglichst viele Eigenvektoren von A erhält, und drücken Sie A bezüglich dieser Basis aus!

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
Let $A = (a_{ij})$ be an invertible $n \times n$-matrix and $B = A^{-1}$ its inverse matrix. Find an explicit formula for the entry b_{ij} of B with denominator $\det A$ and an $(n-1)\times(n-1)$-determinant as its numerator!

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

a) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $M\vec{x} = \vec{v}_i$ mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

soweit möglich nach der CRAMERschen Regel!

b) Unter welchen Bedingungen liefert die CRAMERsche Regel jeweils eine Lösung?

c) Zeigen Sie unabhängig von *a)*, daß unter diesen Bedingungen beim Gleichungssystem $M\vec{x} = \vec{v}_3$ der Lösungsvektor ein Vielfaches von $\vec{v}_3$ sein muß, und benutzen Sie dies, um ihn möglichst einfach darzustellen!

d) Zeigen Sie: Im Falle $a+b+c=0$ gibt es keinen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, für den das lineare Gleichungssystem $M\vec{x} = \vec{v}$ eine eindeutig bestimmte Lösung hat!

Abgabe bis zum Freitag, dem 11. Mai 2007, um 12.00 Uhr