Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

9. März 2007

3. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Jeder Untervektorraum von $\mathbb{Q}^n$ hat eine Basis aus Vektoren mit ganzzahligen Einträgen.
2) $\varphi\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^{10}$ sei eine lineare Abbildung. Welche Werte kann $\dim \operatorname{Bild} \varphi$ annehmen?
3) $\varphi\colon \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^6$ sei eine lineare Abbildung. Welche Werte kann $\dim \operatorname{Kern} \varphi$ annehmen?
4) Berechnen Sie in $\mathbb{F}_2^{10}$ die Summe der beiden Vektoren $\vec{v} = (0,1,0,1,1,0,1,1,1,0)$ und $\vec{w} = (1,0,1,0,1,0,1,0,1,0)$!
5) Finden Sie einen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^{10}$ mit $\vec{v} + \vec{x} = \vec{w}$!

Aufgabe 1: (*4 Punkte)*
a) Welche Dimension hat der Vektorraum $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + 3y + 5z = 0 \right\} \le \mathbb{R}^3$?
b) Bestimmen Sie eine Basis von U!
c) Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*
a) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums

$$U = \left[\sinh t, \cosh t, \sinh^2 t, \cosh^2 t, e^{-2t}, e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}\right] \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,!$$

Dabei ist $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.
b) Zeigen Sie: Das Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon U \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f \mapsto \dfrac{df}{dt}$ liegt in U.
c) Bestimmen Sie eine Basis das Bilds von φ!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*
a) Write the gcd (greatest common divisor) of 2007 and 1115 as a linear combination of those two numbers!
b) Find all pairs (x, y) of integers for which $124x + 256y = 32$!
c) Find the multiplicative inverse of 10 in the field $\mathbb{F}_{2011}$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 16. März 2007, um 12.00 Uhr