Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

2. März 2007

2. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Sind $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen, so ist auch die Hintereinanderausführung $\psi \circ \varphi\colon \begin{cases} U \to W \\ \vec{u} \mapsto \psi\big(\varphi(\vec{u})\big) \end{cases}$ linear.

2) Richtig oder falsch: Ist $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, die der Bedingung $\varphi \circ \varphi = \varphi$ genügt, so ist φ entweder die Nullabbildung oder die Identität.

3) Richtig oder falsch: Der Durchschnitt zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.

4) Richtig oder falsch: Die Vereinigung zweier Untervektorräume eines Vektorraums V ist wieder ein Untervektorraum.

5) True or false: If the vectors $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, and $\vec{b}_4$ form a basis of a vector space V over $\mathbb{R}$, then so do $4\vec{b}_4, 3\vec{b}_3, 2\vec{b}_2$, and $\frac{1}{7}\vec{b}_1$.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+5y-z \\ x-5y+z \end{pmatrix} \end{cases}$ ist linear.

b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von φ!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß $V = \big\{ a \sin 2t + b \cos 3t \bigm| a, b \in \mathbb{R} \big\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist!

b) Definiert die Vorschrift $\varphi(f) = \frac{df}{dt}$ eine lineare Abbildung $V \to V$?
Hinweis: $\frac{d}{dt} \sin 2t = 2 \cos 2t$ und $\frac{d}{dt} \cos 3t = -3 \sin 3t$

c) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastabbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} V \to \mathbb{R}^6 \\ f \mapsto \big(f(0), f(\tfrac{1}{2}\pi), f(\pi), f(\tfrac{3}{2}\pi), f(2\pi), f(\tfrac{5}{2}\pi)\big) \end{cases} \quad !$$

Problem 3: (*5 points)*

a) Show that the vectors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ are linearly independent!

b) Find three real numbers $a, b, c \in \mathbb{R}$ such that $[\vec{u}, \vec{v}] = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz = 0 \right\}$ for these two vectors $\vec{u}, \vec{v}$!

c) For an arbitrary vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, show that $\vec{u}, \vec{v}$ and $\vec{w}$ generate $\mathbb{R}^3$ if and only if $ap + bq + cr \neq 0$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 9. März 2007, um 12.00 Uhr