

Es ist klar, daß auch Summen und skalare Vielfache von stark abfallenden Funktionen stark abfallend sind; der SCHWARTZ-Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist daher ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

**Beispiele:** a) Die Funktion  $f(t) = e^{-t^2}$  liegt in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ : Sie ist beliebig oft stetig differenzierbar; ihre Ableitungen haben jeweils die Form  $P(t)e^{-t^2}$  mit einem geeigneten Polynom  $P$ . Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, geht  $e^{-t^2}$  schneller gegen Null als ein Polynom gegen unendlich gehen kann, das Produkt geht also für  $t \rightarrow \pm\infty$  gegen Null und ist daher auf ganz  $\mathbb{R}$  beschränkt.

b) Sei

$$f(t) = \begin{cases} \frac{-1}{(t-a)(b-t)} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls  $(a, b)$  verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit  $f$  selbst; da  $f(t)$  für  $t \rightarrow a$  oder  $t \rightarrow b$  erheblich schneller gegen null geht als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall  $[a, b]$  ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

**Lemma:** a) Für eine Funktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)} dt.$$

b) Für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $\omega \in \mathbb{R}$  existiert das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt;$$

für  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $t \in \mathbb{R}$  existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

c) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt \end{cases}$$

macht  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  zu einem HERMITESCHEN Vektorraum.

**Beweis:** a) Da sowohl  $f(t)$  als auch  $t^2 f(t)$  beschränkt sind, ist auch  $(1+t^2)f(t)$  beschränkt, es gibt also eine Konstante  $C \in \mathbb{R}$ , so daß

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Da das uneigentliche Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} &= \lim_{a,b \rightarrow \infty} \int_{-a}^b \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan(-a)) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

konvergiert, ist es eine konvergente Majorante des Integrals über  $f$ , so daß nach dem Majorantenkriterium auch das letztere konvergiert. Damit ist auch b) bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale  $\widehat{f}(\omega)$  und  $\check{g}(t)$ , denn da  $e^{\pm i\omega t}$  den Betrag eins hat, ist auch für jedes  $\omega \in \mathbb{R}$  bzw.  $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = |f(t) \cdot e^{-i\omega t}| \leq \frac{C}{1+t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = |g(\omega) \cdot e^{i\omega t}| \leq \frac{C}{1+\omega^2}.$$

Genauso läßt sich auch das Integral über  $f(t)\overline{f(t)}$  abschätzen, denn da  $|tf(t)|$  beschränkt ist, ist auch  $t^2 f(t)\overline{f(t)}$  und damit  $(1+t^2)f(t)\overline{f(t)}$  beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Wie wir gerade gesehen haben, konvergiert das rechtsstehende Integral im Spezialfall  $f = g$ . Für beliebiges  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und beliebige reelle Zahlen  $a \leq b$  gilt nach der CAUCHY-SCHWARZSchen Ungleichung in der etwas allgemeineren Form aus [HMI], Kap. 1, §6c)

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)\overline{f(t)} dt} \cdot \sqrt{\int_a^b g(t)\overline{g(t)} dt},$$

und somit konvergiert mit der rechten Seite auch die linke für  $a \rightarrow -\infty$  und  $b \rightarrow \infty$ .

Die Eigenschaften eines HERMITESchen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt dies genauso wie in [HMI], Kap. 1, §6a) für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . ■

Da mit einer Funktion  $f$  auch alle deren Ableitungen sowie ihre Produkte mit Polynomen stark abfallend sind, gelten im übrigen auch die Formeln aus dem letzten Paragraphen über FOURIER-Transformationen und Ableitungen, ohne daß wir uns über die dort notwendigen, für Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum aber automatisch erfüllten Zusatzvoraussetzungen Gedanken machen müssen.

**b) Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion**

Ein wesentliches Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis, daß zumindest auf dem SCHWARTZ-Raum die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für *eine* spezielle Funktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für *alle*  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich  $f(t) = e^{-t^2}$  und  $f(t) = e^{-1/(t-a)(b-t)}$  auf  $(a, b)$  und null sonst. Da das

erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz  $\sigma^2$ ; ihr Graph wird auch als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 23 zeigt die Kurven für  $\sigma = 1/2$  (gepunktet),  $\sigma = 1$  (ausgezogen) und  $\sigma = 2$  (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere  $\sigma$ , wohingegen kleine  $\sigma$  zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Zusammenhang mit der Fehlerrechnung und Statistik werden uns am Ende des Semesters noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

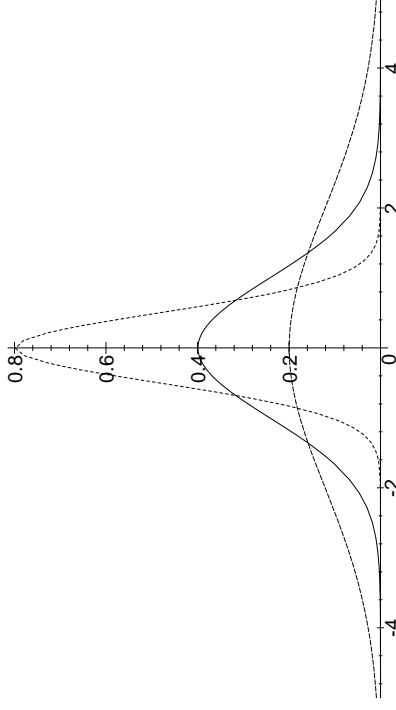


Abb. 23: Gaußkurven für  $\sigma = \frac{1}{2}, 1$  und  $2$

Nach Definition ist

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt,$$

aber da schon die Stammfunktion von  $e^{-t^2}$  nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von  $\widehat{f}(\omega)$  machen:

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i) \cdot \widehat{t}\widehat{f}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-i\omega t} dt.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2} + i\omega\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt} \left( -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} \right) = (t + i\omega\sigma^2) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t}.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für  $t \rightarrow \pm\infty$  gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (t + i\omega\sigma^2) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt = -i\omega\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt.$$

Die Ableitung von  $\widehat{f}(\omega)$  ist daher

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma} (-i\omega\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2} - i\omega t} dt = -\omega\sigma^2 \cdot \widehat{f}(\omega).$$

Somit ist  $\widehat{f}(\omega)$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dg}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2 \cdot g(\omega).$$

Diese Differentialgleichung hat offensichtlich die Nullfunktion als eine ihrer Lösungen; falls sie auch eine Lösung  $g(\omega)$  hat, die nicht für alle

Werte von  $\omega$  verschwindet, können wir zumindest in der Umgebung solcher Werte durch  $g(\omega)$  dividieren und erhalten

$$\frac{g'(\omega)}{g(\omega)} = -\omega\sigma^2.$$

Da die Ableitung der Logarithmusfunktion die Funktion  $1/x$  ist, zeigt die Kettenregel, daß die linke Seite dieser Gleichung die Ableitung von  $\ln g(\omega)$  ist. Durch Integration beider Seiten folgt

$$\ln g(\omega) = -\frac{\omega^2\sigma^2}{2} + C \implies g(\omega) = e^C e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

Somit ist  $\widehat{f}(\omega)$  ein konstantes Vielfaches von  $e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$ , d.h.

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0) \cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}.$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von  $f$  bekannt bis auf die Konstante

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

In [HM1], Kap. 2, §6c) hatten wir auf dem Umweg über ein zweidimensionales Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

berechnet; über die Substitution  $u = t/\sqrt{2}\sigma$  folgt daraus sofort

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1.$$

Als Endergebnis erhalten wir somit

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)},$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß es sich abgesehen vom Vorfaktor  $\sqrt{2\pi}/\sigma$  wieder um eine GAUSS-Funktion handelt, allerdings mit Varianz  $1/\sigma^2$ .

Mit der Abkürzung

$$N_\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

können wir kurz schreiben

$$\widehat{N}_\sigma(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} N_{1/\sigma}(\omega).$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi} \widehat{N}_\sigma(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega).$$

Insbesondere können wir damit nachrechnen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{\check{N}}_\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sigma}} N_\sigma(t) = N_\sigma(t).$$

Genauso zeigt man, daß auch  $\check{\check{N}}_{\sigma(t)} = N_\sigma(t)$  ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

**c) Die Umkehrung der Fourier-Transformation**

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen  $N_\sigma$  gilt, sondern für *alle* Funktionen aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , d.h.

**Satz:** Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \widehat{f} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \check{g} \end{cases}.$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist

$$\check{\check{f}}(t) = f(t).$$

Für das HERMITESche Skalarprodukt auf  $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$  gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)} d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega)\overline{\check{g}(\omega)} d\omega,$$

und damit insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\widehat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\check{f}\|_2 \quad \text{mit} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

*Beweis:* Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob  $\widehat{\widehat{f}}$  und  $\check{\check{g}}$  stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die Produkte  $\omega^r \widehat{f}(\omega)$ . Für diese ist

$$\left| \omega^r \widehat{f}(\omega) \right| = \left| (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) e^{-i\omega t} dt \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(r)}(t)| dt < \infty,$$

da  $f$  stark abfallend ist. Für

$$\omega^r \widehat{\widehat{f^{(k)}}}(\omega) = \omega^r (-i)^k \widehat{f^{(k)}}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Transformation und inverser FOURIER-Transformation folgt daraus auch das Ergebnis für  $\check{g}$ .

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\check{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen  $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\check{f}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \right) e^{i\omega t} g(\omega) d\omega,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega(s-t)} d\omega \right) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \widehat{g}(s-t) ds.$$

Nun sei  $a$  eine positive reelle Konstante und  $g(\omega) = h(a\omega)$ , wobei die Funktion  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution  $\nu = a\omega$  auf

$$\begin{aligned} \widehat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega) e^{-i\omega s} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{-i\nu \frac{s}{a}} \frac{d\nu}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) e^{-i\nu \frac{s}{a}} d\nu = \frac{1}{a} \widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right). \end{aligned}$$

Nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(a\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cdot \frac{1}{a} \cdot \widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right) ds.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist  $s = t + au$ , und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(a\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+au) \cdot \widehat{h}(u) du.$$

Beide Seiten sind stetig in  $a$ ; für  $a \rightarrow 0$  erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} h(0) d\omega = h(0) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \cdot h(0) \cdot \check{f}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \widehat{h}(u) du = f(t) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(u) du = 2\pi \cdot f(t) \cdot \check{h}(0).$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen  $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  stets

$$h(0) \cdot \check{f}(t) = f(t) \cdot \check{h}(0).$$

Setzen wir nun für  $h$  speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}},$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß  $\check{h}$  und  $h$  übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle  $\omega = 0$  den von null verschiedenen Wert  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\check{\check{f}}(t) = f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\check{\widehat{f}}(\omega) = 2\pi \check{\check{f}}(-\omega) \quad \text{und} \quad \check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \check{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\widehat{\widehat{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi f(-(-\omega)) = f(\omega).$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITESCHE Skalarprodukt auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor  $e^{i\omega t}$ : Für eine beliebige Funktion  $g(\omega)$  aus  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) g(\omega) d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{g}(t) dt,$$

wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) g(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \widehat{g}(t) dt. \quad (*)$$

Um daraus Aussagen über das HERMITESCHE Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi \check{f}(-t) = 2\pi f(-t) \quad \text{oder} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}}(-t) \quad (**)$$

und

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{g}}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(t) e^{-i\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(t)} e^{i\omega t} dt \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} \overline{\widehat{g}(-t)} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{g}(-t)} e^{-i\omega t} dt \\ &= \widehat{\overline{g}}(-\omega), \end{aligned} \quad (***)$$

wobei der Übersichtlichkeit halber  $\overline{g}$  für diejenige Funktion steht, die jedem Wert  $t$  den Funktionswert  $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$  zuordnet; entsprechend ist  $\widehat{\overline{g}}(t) = \overline{\widehat{g}(t)}$ .

Damit läßt sich das HERMITESCHE Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt \stackrel{(***)}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t) \widehat{\widehat{g}}(-t) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t) \widehat{\overline{g}}(-t) dt \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2} \cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \widehat{\overline{g}}(-t) dt \\ &\stackrel{(***)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \overline{\widehat{g}(t)} dt = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f}, \widehat{g}). \end{aligned}$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f}, \check{g}) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{\widehat{f}}, \widehat{\widehat{g}}) = \frac{1}{2\pi} (f, g). \quad \blacksquare$$

**Bemerkung:** Falls wir für beide Transformationen den Vorfaktor  $1/\sqrt{2\pi}$  gewählt hätten, würden beide das HERMITESCHE Skalarprodukt respektieren, allerdings müßten wir uns dann ständig mit dieser Wurzel vor den Integralen herumschlagen. So hat jede Normierung ihre Vor- und Nachteile.

### §8: Die Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, verhält sich die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum genau so, wie wir es erwarten. Leider sind aber die Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum für die meisten Anwendungen zu schön, um nützlich zu sein. Wir brauchen daher einen größeren Funktionenraum, auf dem wir die FOURIER-Transformation immer noch gut verstehen können. Darum geht es in diesem Paragraphen.

#### a) Quadratintegrierbare Funktionen

**Definition:** Eine integrierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *quadratintegrierbar*, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

existiert und konvergiert. Der Vektorraum aller quadratintegrierbarer Funktionen wird mit  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  bezeichnet.

Nach Aussage c) des ersten Lemmas aus §7a) ist jede stark abfallende Funktion quadratintegrierbar, d.h. der SCHWARTZ-Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist ein Untervektorraum von  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . Er ist allerdings deutlich kleiner als

$L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , denn beispielsweise ist auch jeder Rechteckimpuls quadratintegrierbar und allgemeiner jede stückweise stetige Funktion, die außerhalb eines endlichen Intervalls  $[a, b]$  identisch verschwindet. Auch Funktionen wie  $e^{-|t|}$  liegen in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|t|}|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = 1.$$

Funktionen wie  $\sin \omega t$  sind natürlich nicht quadratintegrierbar; aber bei periodischen Funktionen betrachtet man ohnehin sinnvollerweise nur Integrale über eine Periode, nicht solche über die gesamte reelle Achse. (Das ist der aus der Elektrotechnik bekannte Unterschied zwischen Energie- und Leistungssignalen; die Energiesignale sind genau die quadratintegrierbaren.)

Auf dem SCHWARTZ-Raum haben wir ein HERMITESCHES Produkt, bezüglich dessen wir das Integral über  $|f|^2$  kurz als  $\sqrt{f, f}$  schreiben können; wir wollen uns als nächstes überlegen, daß zumindest die Definition

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

auch für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  sinnvoll ist:

Da  $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , ist nach der binomischen Formel auch

$$|f(t)| \cdot |g(t)| \leq \frac{1}{2} (|f(t)|^2 + |g(t)|^2),$$

also

$$\int_N^M |f(t)g(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_N^M f(t) \overline{g(t)} dt + \frac{1}{2} \int_N^M g(t) \overline{f(t)} dt$$

für alle  $N \leq M \in \mathbb{R}$ . Rechts konvergieren beide Integrale für  $N \rightarrow -\infty$  und  $M \rightarrow \infty$ , also auch links, und damit konvergiert das Integral zu  $(f, g)$  sogar absolut.

Es hat alle Eigenschaften eines HERMITESCHEN Produkts mit Ausnahme der positiven Definitheit – genau wie wir es vom periodischen Fall her gewohnt sind. Wie dort bezeichnen wir

$$\|f\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(f, f)}$$

kurz, wenn auch schlampig als  $L^2$ -Norm von  $f$ , denn – wie schon bei den periodischen Funktionen – können die Funktionen  $f \neq 0$  mit  $\|f\|_2 = 0$  für die meisten Anwendungen *praktisch* vernachlässigt werden.

**Definition:**  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  heißt *Nullfunktion*, wenn  $\|f\|_2 = 0$  ist.

Nach der CAUCHY-SCHWARZSchen Ungleichung, die wir in [HMI], Kap. I, §6c) aus gutem Grund auch für Produkte bewiesen haben, die nur bis auf die positive Definitheit HERMITESCH sind, ist dann für eine beliebige Funktion  $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$|(f, g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 = 0,$$

für eine Nullfunktion  $f$  verschwindet also jedes Produkt  $(f, g)$ , und umgekehrt ist auch jede Funktion mit dieser Eigenschaft eine Nullfunktion, denn  $\|f\|_2$  ist ja die Wurzel aus  $(f, f)$ .

**b) Distributionen auf dem Schwartz-Raum**

Jede quadratintegrierbare Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  definiert eine lineare Abbildung

$$\tilde{T}_f: \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt \end{cases}$$

Man beachte, daß hier trotz der komplexwertigen Funktionen keine komplexe Konjugation steht! Vergleich mit dem Produkt

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

zeigt, daß

$$\tilde{T}_f(g) = (f, \bar{g}) = (g, \bar{f})$$

ist. Insbesondere ist  $\tilde{T}_f$  genau dann gleich der Nullabbildung, wenn  $f$  eine Nullfunktion ist.

Da der SCHWARTZ-Raum ein Untervektorraum von  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist, können wir  $\tilde{T}_f$  auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  einschränken und die lineare Abbildung

$$T_f: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt \end{cases}$$

betrachten. Mit Hilfe dieser Abbildung wollen wir im folgenden Eigenschaften von  $f$  und seiner FOURIER-Transformierten (über deren Existenz wir noch nichts wissen) auf Eigenschaften stark abfallender Funktionen zurückführen.

Die Abbildung  $T_f$  existiert nicht nur für quadratintegrierbare Funktionen  $f$ , sondern allgemeiner für *jede* Funktion, deren Betrag höchstens polynomial ansteigt:

**Lemma:** Falls es zu einer stückweise stetigen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Konstanten  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so daß

$$|f(t)| \leq c \cdot |t|^k$$

ist, existiert  $T_f(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

*Beweis:* Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist  $t^\ell \varphi(t)$  beschränkt für alle  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , insbesondere also für  $\ell = k$  und  $\ell = k + 2$ . Damit ist auch deren Summe beschränkt, es gibt also eine Konstante  $M > 0$ , für die

$$\left| t^k (1 + t^2) \varphi(t) \right| = \left| t^k \varphi(t) + t^{k+2} \varphi(t) \right| \leq M$$

ist. Damit folgt

$$\left| (1 + t^2) f(t) \varphi(t) \right| \leq \left| (1 + t^2) c t^k \varphi(t) \right| \leq cM$$

und

$$|f(t)\varphi(t)| \leq \frac{cM}{1+t^2}.$$

Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{cM}{1+t^2} dt = cM \arctan t \Big|_{-\infty}^{\infty} = cM\pi$$

konvergiert, ist auch das Integral  $T_f(\varphi)$  über die linke Seite der Gleichung absolut konvergent. ■

Außerdem hat  $T_f$  eine Stetigkeitseigenschaft, die wir im Hinblick auf spätere Anwendungen gleich etwas allgemeiner formulieren wollen:

**Lemma:**  $\varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f, \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  seien Funktionen derart, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

existieren. Außerdem sei  $f$  beschränkt und

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt.$$

*Beweis:* Ist  $|f(t)| \leq M$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , so ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_n(t) dt \right| \\ \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt \end{aligned}$$



$$\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt,$$

und letztere ist das  $M$ -fache einer Nullfolge, also selbst Nullfolge. ■

Wir wollen dies anwenden auf Funktionen  $\varphi$  aus dem SCHWARTZ-Raum und Funktionen  $f$ , die höchstens polynomial ansteigen, die aber nicht notwendigerweise beschränkt sind. Um das zu kompensieren, führen wir für Folgen aus dem SCHWARTZ-Raum einen stärkeren Konvergenzbegriff ein, wobei wir (wie schon bei der Definition einer stark abfallenden Funktion) gleich so viel wie nur irgendwie möglich fordern:

**Definition:** Eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Funktionen  $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  konvergiert gegen  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , wenn für alle  $r, k \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k (\varphi^{(r)}(t) - \varphi_n^{(r)}(t))| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wir fordern also, daß *alle* Produkte von  $t$ -Potenzen und Ableitungen von  $\varphi_n$  gegen die entsprechende Konstruktion für  $\varphi$  konvergieren. Unter dieser extrem starken Voraussetzung verwundert nicht

**Lemma:**  $f$  sei eine stückweise stetige Funktion, die einer Abschätzung der Form  $|f(t)| \leq ct^k$  genüge. Dann ist für jede gegen  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  konvergente Folge von Funktionen  $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi).$$

**Beweis:** Wir gehen ähnlich vor wie beim Beweis der Existenz von  $T_f(\varphi)$ : Für jedes  $\ell \in \mathbb{N}_0$  ist

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^\ell (\varphi(t) - \varphi_n(t))|$$

eine Nullfolge, es gibt also zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so daß

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^\ell (\varphi(t) - \varphi_n(t))| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

Insbesondere gibt es solche Werte für  $\ell = k$  und für  $\ell = k + 2$ , und damit gibt es auch zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so daß

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |t^k (1 + t^2)(\varphi(t) - \varphi_n(t))| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N,$$

d.h.

$$|t^k (\varphi(t) - \varphi_n(t))| < \frac{\varepsilon}{1 + t^2} \quad \text{für alle } n > N \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi) - T_f(\varphi_n)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)(\varphi(t) - \varphi_n(t))| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |ct^k (\varphi(t) - \varphi_n(t))| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c\varepsilon}{1 + t^2} dt = c\pi \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

für alle  $n > N_0$ . Da  $c$  und  $\pi$  konstant sind und wir  $\varepsilon$  beliebig klein machen können, folgt die Behauptung. ■

**Definition:** Eine *Distribution* auf dem SCHWARTZ-Raum ist eine lineare Abbildung  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ , so daß für jede gegen ein  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  konvergente Folge stark abfallender Funktionen  $\varphi_n$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_f(\varphi_n) = T_f(\varphi).$$

Nach dem gerade bewiesenen Lemma ist also  $T_f$  für jede stückweise stetige Funktion  $f$ , die nicht stärker als ein Polynom wächst, eine Distribution auf dem SCHWARTZ-Raum.

Das sind allerdings bei weitem noch nicht alle Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum: Beispielsweise ist für jedes  $a \in \mathbb{R}$  auch

$$\Delta_a: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

eine Distribution: Die Linearität ist klar, und für eine gegen  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  konvergente Folge stark abfallender Funktionen  $\varphi_n$  ist insbesondere

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t) - \varphi_n(t)|$$

eine Nullfolge, erst recht also  $|\varphi(a) - \varphi_n(a)|$ , so daß es auch mit der Stetigkeit keine Probleme gibt.

Diese Distribution bezeichnet man als DIRACSche Delta-Distribution. Nicht ganz korrekt spricht man auch von einer DIRACSchen Delta-Funktion und schreibt, gerade so als sei  $\Delta_a$  von der Form  $T_\delta$ ,

$$\Delta_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt \quad \text{und} \quad \Delta_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) dt.$$

Die Schreibweise  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t) = f(a)$  findet man nicht nur für Funktionen  $f$  aus dem SCHWARTZ-Raum, sondern oft auch für beliebige stetige Funktionen  $f$ .



PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC (1902–1984) wuchs auf in England als Sohn eines Schweizer Vaters und einer englischen Mutter. Trotz großem Interesse an der Mathematik studierte er von 1918–1921 Elektrotechnik an der Universität Bristol, da er auf keinen Fall Lehrer werden wollte. 1921 erhielt er ein Stipendium der Universität Cambridge; da dieses aber nicht zum Leben gereicht hätte, blieb er in Bristol, wo ihn die Universität von Studiengebühren befreite und seinen Wechsel in die Mathematik erlaubte. Ab 1923 arbeitete er in Cambridge an seiner Dissertation über Quantenmechanik, die er 1926 abschloß. 1930 folgte ein Buch über Quantenmechanik, für das er 1933 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet wurde. 1932 bekam er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Cambridge. Nach seiner Emeritierung lebte er in Florida, wo er 1971 Physikprofessor an der Florida State University wurde. Zentrales Thema seiner Arbeiten war die Anwendung mathematischer Methoden auf die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie sowie auch Ansätze zur (bis heute nicht befriedigend gelösten) Vereinheitlichung dieser beiden Theorien.

Wenn es wirklich eine Funktion  $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  gäbe, für die

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0)$$

wäre für jede (stark abfallende oder auch einfach stetige) Funktion  $f$ , so müßte  $\delta(t)$  für  $t \neq 0$  verschwinden – abgesehen eventuell von einigen

isolierten Punkten, die für die Integration bedeutungslos sind. Damit müßte aber unabhängig vom Funktionswert  $\delta(0)$  und unabhängig von der Funktion  $f$  das Integral verschwinden.

Die „Lösung“,  $\delta(0) = \infty$  zu setzen, führt nicht zu einer sinnvollen Interpretation des linksstehenden Integrals, denn wenn man einen Ausdruck wie  $2 \cdot \infty$  überhaupt sinnvoll interpretieren kann, dann wohl nur im Sinne von  $2 \cdot \infty = \infty$ , und damit wäre  $2\delta(t) = \delta(t)$ , obwohl die Distributionen

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(0) \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto 2\varphi(0) \end{array} \right.$$

wohldefiniert und offensichtlich verschieden sind.

Die Schreibweise mit einer „Funktion“  $\delta$  ist also in mehrfacher Hinsicht problematisch, hat sich aber gerade in der technischen Literatur eingebürgert und soll daher auch hier verwendet werden. Man sollte sich aber klar machen, daß man nur Ausdrücke wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-x)f(t) dt = f(x)$$

sinnvoll interpretieren kann, in anderen Zusammenhängen hat  $\delta(t)$  keine vernünftige Bedeutung.

Problemlos unter einem Integralzeichen sind auch Linearkombinationen der Art

$$\sum_{k=1}^n a_k \delta(t-t_k),$$

denn Linearkombinationen von Distributionen sind wieder Distributionen. Im vorliegenden Fall wäre dies die Distribution

$$\sum_{k=1}^n a_k \Delta_{t_k},$$

für eine stark abfallende Funktion  $\varphi$  ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k \delta(t-t_k) \right) \varphi(t) dt = \sum_{k=1}^n a_k \Delta_{t_k}(\varphi) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi(t_k),$$

und da man zumindest die DIRAC-Distribution auch einfach als lineare Abbildung auf  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  betrachtet, kann man dies auch für eine beliebige stetige Funktion  $\varphi$  sinnvoll interpretieren. So ist beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)e^{i\omega t} dt = e^{i\omega} \quad \text{und} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1))e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t.$$

Da wir nur Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum betrachten, sind auch viele unendliche Linearkombinationen wie etwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \Delta_k$$

wohldefiniert, denn für eine stark abfallende Funktion  $\varphi$  konvergieren sowohl

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) \quad \text{als auch} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \varphi(k).$$

Wir können eine Distribution  $T$  auf dem SCHWARTZ-Raum nicht nur mit Konstanten multiplizieren, sondern allgemeiner auch mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion  $g$ , die höchstens polynomiales Wachstum hat: Für eine Distribution der Form  $T_f$  ist

$$T_{gf}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(g(t)\varphi(t)) dt = T_f(g\varphi),$$

da auch  $g\varphi$  eine stark abfallende Funktion ist. Somit können wir für eine beliebige Distribution  $T$  auf dem SCHWARTZ-Raum das Produkt

$$gT: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(g\varphi) \end{cases}$$

definieren. Beispielsweise gehört  $t\delta(t)$  zur Distribution

$$t\Delta_0: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \Delta_0(t\varphi) = (t\varphi)(0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0, \end{cases}$$

d.h.  $t\delta = 0$ . Man überlegt sich leicht, daß für jede Funktion  $g$  wie oben gilt  $g\delta = g(0)\delta$ .

Problematischer ist die Definition eines Produkts von Distributionen: Die obige Rechnung drückt  $T_{gf}$  aus durch  $T_f$  und  $g$ , nicht aber durch  $T_f$  und  $T_g$ , wie wir es bräuchten, um ein Produkt zweier Distributionen zu definieren. Auch sonstige Versuche, den Ausdruck  $T_{gf}(\varphi)$  umzuformen, führen nicht zu brauchbareren Ergebnissen, und in der Tat kann man in der Theorie der Distributionen ein Produkt nur als Linearform auf dem SCHWARTZ-Raum der stark abfallenden Funktionen *zweier* Veränderlicher definieren. Dieser Raum wird weiter hinten zwar kurz erwähnt werden, es würde aber zu weit führen, ihn wirklich zu behandeln. Wir wollen daher nur festhalten, daß Produkte von  $\delta$ -„Funktionen“ nicht sinnvoll als Distributionen auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  definiert werden können und.

Ähnlich ist es mit Ausdrücken der Form  $e^{\delta(t)}$  oder  $\sin \delta(t)$ : Da beispielsweise

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)} \varphi(t) dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{\varphi(t)} dt$$

nichts miteinander zu tun haben (und  $e^{\varphi(t)}$  nicht einmal eine stark abfallende Funktion ist), können wir hier nicht einfach die Exponentialfunktion ins Argument von  $T_f$  schieben, und es ist gibt auch keine sonstige Art und Weise, Ausdrücken wie  $e^{\delta(t)}$  oder  $\sin \delta(t)$  einen Sinn zu geben. Bei der Funktionsschreibweise von Distributionen muß man sich also stets sorgfältig überlegen, ob ein gegebener Ausdruck wirklich sinnvoll interpretiert werden kann oder nicht.

### c) Die Fourier-Transformierte einer Distribution

$f$  sei eine absolut integrierbare Funktion, d.h. das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

konvergiere gegen einen endlichen Wert. Dann ist auch  $f(t)e^{-i\omega t}$  absolut integrierbar, da diese Funktion den gleichen Betrag hat wie  $f(t)$ , und

damit konvergiert auch das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

absolut. Da Multiplikation des Integranden mit einer stark abfallenden Funktion  $\varphi$  nichts an der absoluten Integrierbarkeit ändert, ist auch die lineare Abbildung

$$T_{\widehat{f}}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\varphi(t) dt \end{cases}$$

wohldefiniert, und nach dem Satz von FUBINI gilt für alle stark abfallenden Funktionen  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T_{\widehat{f}}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \varphi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right) \varphi(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t} d\omega \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{\varphi}(t) dt = T_f(\widehat{\varphi}). \end{aligned}$$

Dies legt folgende Definition nahe:

**Definition:** Die FOURIER-Transformierte der Distribution  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  ist die Distribution

$$\widehat{T}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\widehat{\varphi}) \end{cases};$$

die inverse FOURIER-Transformierte von  $T$  ist

$$\check{T}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto T(\check{\varphi}) \end{cases}.$$

Zunächst müssen wir uns überlegen, ob das überhaupt sinnvoll ist:

**Lemma:** Für eine Distribution  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  sind auch  $\widehat{T}$  und  $\check{T}$  wieder Distributionen und  $\check{\check{T}} = \widehat{\widehat{T}} = T$ .

*Beweis:* Die letzte Aussage folgt sofort aus den Definitionen sowie der entsprechenden Aussage für starkabfallende Funktionen in §7c). Auch die Linearität von  $\widehat{T}$  ist klar, da die FOURIER-Transformation auf dem SCHWARTZ-Raum eine lineare Operation ist, d.h. die FOURIER-Transformierte von  $\lambda\varphi + \mu\psi$  für  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  ist  $\lambda\widehat{\varphi} + \mu\widehat{\psi}$ .

Für die Stetigkeit von  $\widehat{T}$  genügt es wegen der Stetigkeit von  $T$ , wenn wir zeigen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen  $\varphi_n(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  mit Grenzwert  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  auch die Folge der FOURIER-Transformierten  $\widehat{\varphi}_n$  gegen  $\widehat{\varphi}$  konvergiert. Wir müssen also zeigen, daß für je zwei Zahlen  $k, r \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \omega^k \widehat{\varphi}_n^{(r)}(\omega) - \omega^k \widehat{\varphi}^{(r)}(\omega) \right| = 0.$$

Nach den Formeln aus §6b) ist

$$\begin{aligned} \omega^k \widehat{\varphi}_n^{(r)}(\omega) &= \omega^k \cdot (-i)^r \widehat{t^r \varphi}_n(\omega) = (-i)^r \cdot \omega^k \widehat{t^r \varphi}_n(\omega) \\ &= (-i)^r \cdot (-i)^k \widehat{\psi}(\omega) = (-i)^{r+k} \widehat{\psi}(\omega) \quad \text{mit } \psi = \frac{d^k}{dt^k}(t^r \varphi(t)). \end{aligned}$$

Durch  $k$ -fache Anwendung der Produktregel folgt, daß  $\psi$  Linearkombination von Termen der Form  $t^\ell \varphi^{(s)}$  ist. Wegen der Dreiecksungleichung reicht es also, zu zeigen, daß für alle  $\ell, s \in \mathbb{N}_0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| t^\ell \widehat{\varphi}_n^{(s)}(\omega) - t^\ell \widehat{\varphi}^{(s)}(\omega) \right| = 0.$$

Nach Definition der Konvergenz in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  gibt es zu  $\ell, s$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N_1 \in \mathbb{N}$ , so daß für  $n \geq N_1$  gilt

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Genauso gibt es auch ein  $N_2 \in \mathbb{N}$ , so daß für  $n \geq N_2$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^{\ell+2} \varphi_n^{(s)}(t) - t^{\ell+2} \varphi^{(s)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; für  $n$  größer oder gleich dem Maximum  $N_0$  von  $N_1$  und  $N_2$  gilt also

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\varphi}_n^{(s)}(\omega) - t^\ell \widehat{\varphi}^{(s)}(\omega) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t)) e^{-i\omega t} dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |t^\ell \varphi_n^{(s)}(t) - t^\ell \varphi^{(s)}(t)| dt \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \varepsilon\pi, \end{aligned}$$

der Limes für  $n \rightarrow \infty$  ist also gleich null, wie behauptet. ■

Um zu sehen, was die neue Definition bringt, wollen wir die FOURIER-Transformierte des Sinus berechnen: Im klassischen Sinne als

$$\widehat{\sin} \omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sin t \cdot e^{-i\omega t} dt$$

existiert sie bekanntlich nicht. Im Distributionensinne ist

$$\begin{aligned} \widehat{T}_{\sin}(\widehat{\varphi}) &= T_{\sin} \omega \widehat{\varphi}(\omega) d\omega = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \widehat{\varphi}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega} d\omega - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(\omega) e^{-i\omega} d\omega \\ &= \frac{2\pi}{2i} (\check{\varphi}(1) - \check{\varphi}(-1)) = -\pi i (\varphi(1) - \varphi(-1)), \end{aligned}$$

denn für jede Funktion  $g$  ist

$$\check{g}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega} d\omega \quad \text{und} \quad \check{g}(-1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega} d\omega.$$

Für die oben eingeführte DIRAC-Distribution gilt

$$\Delta_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t) dt = \varphi(a),$$

und damit ist

$$\widehat{T}_{\sin} = -\pi i (\Delta_1 - \Delta_{-1}) = \pi i (\Delta_{-1} - \Delta_1).$$

Kurz, wenn auch etwas kriminell, können wir dies als

$$\widehat{\sin}(\omega) = \pi i (\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1))$$

schreiben.

Falls diese Rechnung auf ein sinnvolles Ergebnis führte, sollte

$$\sin t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\sin} \omega \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

sein, und in der Tat ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\pi i) (\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)) e^{i\omega t} d\omega \\ = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-1) e^{i\omega t} d\omega + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega+1) e^{i\omega t} d\omega \\ = -\frac{i}{2} (e^{it} - e^{-it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t. \end{aligned}$$

#### d) Der Satz von Riesz

Der letzte Abschnitt hat gezeigt, daß die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der Distributionen weitgehend unproblematisch ist. Was uns wirklich interessiert, sind aber Aussagen über die FOURIER-Transformation auf dem Niveau der *Funktionen*; wir müssen also wissen, wie wir von Distributionen wieder zurückkommen zu Funktionen. Wie das Beispiel der DIRAC-Distribution zeigt, ist das nicht immer möglich; wir müssen uns daher als erstes überlegen, was Distributionen der Form  $T_f$  mit  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  auszeichnet.

Betrachten wir dazu für  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  zunächst die lineare Abbildung

$$\tilde{T}_f: \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt \end{cases}$$

Wie im Fall von  $T_f$  rechnet man auch hier schnell nach, daß  $\tilde{T}_f$  der Stetigkeitsbedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_f(g_n) = \tilde{T}_f(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n)$$

genügt, hier allerdings für bezüglich der  $L^2$ -Norm konvergente Folgen  $(g_n)$ .

Außerdem ist nach der CAUCHY-SCHWARZSchen Ungleichung

$$|\tilde{T}_f(g)| = |(f, \bar{g})| \leq \|f\|_2 \cdot \|\bar{g}\|_2 = \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

für jede Funktion  $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  läßt sich  $|\tilde{T}_f(g)|$  also abschätzen durch ein von  $g$  unabhängiges Vielfaches der  $L^2$ -Norm von  $g$ .

Diese Eigenschaft hat nicht jede stetige lineare Abbildung von  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  nach  $\mathbb{C}$ : Beispielsweise ist für die Fortsetzung

$$\tilde{\Delta}_0: \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ g \mapsto g(0) \end{cases}$$

der DIRAC-Distribution  $\Delta_0$  auf  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  und den Rechteckimpuls

$$g_a: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } |t| \leq \frac{1}{a^2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

die  $L^2$ -Norm unabhängig von  $a$  gleich

$$\|g_a\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g_a|^2(t) dt} = \sqrt{\int_{-1/a^2}^{1/a^2} a^2 dt} = \sqrt{2},$$

aber  $\Delta_0(g_a) = g_a(0) = a$  kann beliebig große Werte annehmen. Hier kann  $|\Delta_0(g)|$  also nicht durch ein konstantes Vielfaches von  $\|g\|_2$  abgeschätzt werden.

**Definition:** Eine lineare Abbildung  $T: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  gibt, so daß

$$|T(g)| \leq c \|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Das Infimum aller Zahlen  $c$ , die diese Eigenschaft haben, bezeichnen wir als die *Norm*  $\|T\|$  von  $T$ .

Für  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist  $\tilde{T}_f$  also beschränkt und hat die Norm  $\|f\|_2$ , denn wie wir gerade gesehen haben, ist  $|\tilde{T}_f(g)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$  für alle  $g$ , und speziell für  $g = \bar{f}$  ist  $|\tilde{T}_f(g)| = (f, \bar{f}) = \|f\|_2^2 = \|f\|_2 \cdot \|f\|_2$ .

Das Schöne an quadratintegrierbaren Funktionen ist, daß sich diese Aussage auch umkehren läßt: Zu jeder beschränkten Distribution  $T$  gibt es eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , so daß  $T = \tilde{T}_f$  ist.

Zum Beweis brauchen wir unter anderem, daß  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  bis auf das Problem mit den Nullfunktionen ein HILBERT-Raum ist, d.h.

**Lemma:** In  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  hat jede CAUCHY-Folge einen Grenzwert.

Dieses Lemma ist, so wie wir  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  definiert haben, leider falsch; es gilt nur, wenn wir  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ersetzen durch den etwas größeren Raum aller LEBESGUE-integrierbarer Funktionen, für die das Integral über das Betragquadrat endlich bleibt. Da LEBESGUE-Integrale in dieser Vorlesung nicht definiert wurden, muß also hier eine Lücke bleiben; wo es Probleme gibt, zeigt der

„Beweis“:  $g_n$  sei eine CAUCHY-Folge von Funktionen aus  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $N > 0$ , so daß für  $n, m \geq N$  gilt

$$\|g_n - g_m\|_2 < \varepsilon.$$

Offensichtlicher Kandidat für eine Grenzfunktion ist jene Funktion  $g$ , die jedem Wert  $t$  den Limes der  $g_n(t)$  zuordnet; leider gibt es aber

zunächst keinen Grund, warum diese Folge von Funktionswerten für jedes  $t$  konvergieren sollte. Wir müssen daher etwas härter arbeiten.

Wir verschaffen uns zunächst eine Folge von Werten  $\varepsilon_\nu > 0$ , für die

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu < \infty$$

konvergiert – beispielsweise können wir  $\varepsilon_\nu = \frac{1}{\nu^2}$  setzen. Da  $(g_n)$  eine CAUCHY-Folge ist, gibt es zu jedem dieser  $\varepsilon_\nu$  ein  $n_\nu$ , so daß

$$\|g_n - g_m\|_2 \leq \varepsilon_\nu \quad \text{für alle } n, m \geq n_\nu.$$

Insbesondere ist also

$$\|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \leq \varepsilon_\nu.$$

Damit ist für jede natürliche Zahl  $k$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=k}^{\infty} \varepsilon_\nu &\geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sum_{\nu=k}^{\ell} \|g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}\|_2 \geq \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left\| \sum_{\nu=k}^{\ell} (g_{n_{\nu+1}} - g_{n_\nu}) \right\|_2 \\ &= \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|g_{n_{\ell+1}} - g_{n_k}\|_2. \end{aligned}$$

Da die linke Seite für  $k \rightarrow \infty$  wegen der Konvergenz der Summe der  $\varepsilon_\nu$  gegen null geht, gilt dies auch für die rechte. Daher muß es eine Funktion  $g$  geben, die fast überall mit

$$t \mapsto \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_{n_\nu}(t)$$

übereinstimmt und für die

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|g - g_{n_\nu}\|_2 = 0$$

ist. Da alle  $g_{n_\nu}$  in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  liegen, zeigt die Dreiecksungleichung, daß auch  $g$  dort liegen muß – falls  $g$  integrierbar ist. Man kann zeigen, daß  $g$  in jedem Fall LEBESGUE-integrierbar ist, auch wenn die  $g_n$  ebenfalls nur LEBESGUE-integrierbar sind;  $g$  muß aber nicht RIEMANN-integrierbar sein. Eine letzte Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt noch, daß nicht nur die Teilfolge der  $g_{n_\nu}$ , sondern die Folge aller  $g_n$  in der  $L^2$ -Norm gegen  $g$  konvergiert. ■

Damit kommen wir zum eigentlich interessanten

**Satz von Riesz:** Zu jeder beschränkten und stetigen linearen Abbildung  $T: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , so daß  $T = \tilde{T}_f$  ist und  $\|f\|_2 = \|T\|$ . Die Funktion  $f$  ist bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt.

Der Beweis ist etwas langwierig, aber seine Grundidee ist einfach:

Angenommen, wir betrachten anstelle von  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  den endlichdimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  und eine lineare Abbildung  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann wissen wir natürlich, daß sich  $T(\vec{x})$  schreiben läßt als

$$T(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

mit geeigneten reellen Zahlen  $a_1, a_2$  und  $a_3$ . Diese können wir zusammenfassen zu einen Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ , für den

$$T(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

ist. Dieser Vektor  $\vec{a}$  entspricht der gesuchten Funktion  $f$ ; er steht offensichtlich senkrecht auf dem Untervektorraum

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\vec{x}) = 0\},$$

der außer für  $\vec{a} = \vec{0}$  eine Ebene beschreibt, und er ist durch  $E$  bis auf eine Proportionalitätskonstante eindeutig bestimmt.

In Analogie dazu betrachten wir auch für den Satz von RIESZ den Kern

$$N \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid T(g) = 0\}$$

von  $T$ . Falls  $N = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist, sind wir fertig: Dann verschwindet  $T(g)$  überall, und  $f \equiv 0$  erfüllt alle Behauptungen.

Andernfalls gibt es eine Funktion  $h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , die nicht in  $N$  liegt.

Der erste und umständlichste Beweisschritt besteht darin, daß wir uns überlegen, daß es in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \setminus N$  auch eine Funktion  $\tilde{f}$  gibt, die auf  $N$  senkrecht steht, für die also  $(\tilde{f}, g) = 0$  ist für alle  $g \in N$ .

Dazu betrachten wir den Abstand  $d \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g \in N} \|h - g\|_2$  von  $g$  und  $h$ .

*Zur Erinnerung:* In der Schule definiert man den Abstand eines Punkts von einer Ebene als den Abstand zum nächstgelegenen Punkt der Ebene. Dieser Punkt ist der Fußpunkt des Lots vom gegebenen Punkt auf die Ebene; der Verbindungsvektor steht also senkrecht auf der Ebene. Bei einem unendlichdimensionalen Raum wie  $N$  können wir nicht sicher sein, daß es so etwas wie einen „Lotfußpunkt“ gibt – in der Tat besteht die Hauptarbeit des ersten Beweisschritts genau darin, dies zu zeigen. Deshalb können wir (noch) nicht von einem minimalen Abstand reden, sondern müssen uns zunächst mit einem Infimum begnügen. Wir hoffen aber (zu recht, wie sich bald zeigen wird), daß der „Lotfußpunkt“ auch in unserem Fall existiert und daß der „Lotvektor“ senkrecht auf  $N$  steht.

Obwohl  $h$  nicht in  $N$  liegt, können wir zumindest *a priori* nicht sicher sein, daß obiges Infimum positiv ist – wenn wir anstelle einer *beschränkten* stetigen linearen Abbildung  $T$  beispielsweise die stetige lineare Abbildung  $\hat{\Delta}_0$  betrachten würden, wäre  $d = 0$ .

Da unser  $T$  aber beschränkt ist, haben wir eine Konstante  $c > 0$ , so daß

$$|T(g)| \leq c \|g\|_2 \quad \text{für alle } g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Insbesondere ist für jedes  $g \in N$

$$|T(h)| = |T(h) - T(g)| = |T(h - g)| \leq c \|h - g\|_2.$$

$T(h)$  verschwindet nicht, da  $h$  nicht in  $N$  liegt; folglich ist

$$\|h - g\|_2 \geq \left| \frac{T(h)}{c} \right| \quad \text{für alle } g \in N.$$

Damit ist auch das Infimum  $d$  aller dieser Werte größer oder gleich  $|T(h)|/c$ , also positiv.

Ein Infimum muß nicht angenommen werden, man kann ihm aber beliebig nahekommen. Somit gibt es eine Folge  $(g_n)$  von Funktionen aus  $N$ , so daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|h - g_n\|_2 = d$  ist.

Eine (ziemlich langweilige) Abschätzung zeigt, daß diese Folge eine CAUCHY-Folge ist, d.h. für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine natürliche Zahl  $n_0$ , so daß

$$\|g_m - g_n\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{für } n, m > n_0.$$

Die Einzelheiten seien zum leichteren Überlesen im Kleindruck angegeben:

Zunächst ist für beliebige Funktionen  $p$  und  $q$

$$\|p + q\|_2^2 = (p + q, p + q) = (p, p) + (q, p) + (q, q)$$

und

$$\|p - q\|_2^2 = (p - q, p - q) = (p, p) - (q, p) + (q, q),$$

also

$$\|p + q\|_2^2 + \|p - q\|_2^2 = 2 (\|p\|_2^2 + \|q\|_2^2).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|g_m - g_n\|_2^2 &= \|(h - g_m) - (h - g_n)\|_2^2 \\ &= 2 (\|h - g_m\|_2 + \|h - g_n\|_2^2) - \|2h - g_m - g_n\|_2^2 \\ &= 2 (\|h - g_m\|_2 + \|h - g_n\|_2^2) - 4 \left\| h - \frac{g_m - g_n}{2} \right\|_2^2 \\ &\leq 2 (\|h - g_m\|_2 + \|h - g_n\|_2^2) - 4d^2, \end{aligned}$$

denn mit  $g_m$  und  $g_n$  liegt auch  $(g_m + g_n)/2$  in  $N$ , hat also mindestens Abstand  $d$  von  $h$ . Da für die Folge der  $g_n$  die Abstände  $\|h - g_n\|_2$  gegen  $d$  konvergiert, konvergiert auch die Folge der Abstandsquadrate gegen  $d^2$ , und es gibt zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$ , so daß

$$\|h - g_n\|_2^2 \leq d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } n > n_0.$$

Für  $n, m > n_0$  ist daher

$$\|g_m - g_n\|_2^2 \leq 2 \left( d^2 + \frac{\varepsilon}{4} + d^2 + \frac{\varepsilon}{4} \right) - 4d^2 = \varepsilon,$$

wie behauptet.

Da in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  nach dem vorigem Lemma jede CAUCHY-Folge konvergiert, folgt daß der Grenzwert

$$\tilde{g} = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$$

in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  existiert. Da

$$T(\tilde{g}) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

ist, liegt  $\tilde{g}$  in  $N$ .

Die Funktion  $\tilde{g}$  entspricht dem „Lotfußpunkt“; der „Lotvektor“

$$\tilde{f} = h - \tilde{g},$$



von dem wir bislang nur wissen, daß  $\|\tilde{f}\|_2 = d$  ist, sollte also orthogonal zu  $N$  sein.

Für eine beliebige Funktion  $g \in N$  und eine reelle Zahl  $\lambda \neq 0$  betrachten wir den Abstand

$$\|h - (\tilde{g} + \lambda g)\|_2.$$

Da  $\tilde{g} + \lambda g$  in  $N$  liegt, ist dieser Abstand mindestens gleich  $d$ , d.h.

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|h - (\tilde{g} + \lambda g)\|_2^2 = \|(h - \tilde{g}) - \lambda g\|_2^2 = \|\tilde{f} - \lambda g\|_2^2 \\ &= (\tilde{f} - \lambda g, \tilde{f} - \lambda g) = \|\tilde{f}\|_2^2 + \lambda^2 \|g\|_2^2 - \lambda(g, \tilde{f}) - \overline{\lambda}(\tilde{f}, g). \end{aligned}$$

Da  $\|\tilde{f}\|_2^2 = d^2$  und  $\overline{\lambda} = \lambda$  ist, folgt nach Division durch  $\lambda$ , daß

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda \|g\|_2^2 - ((g, \tilde{f}) + (\tilde{f}, g)) = \lambda \|g\|_2^2 - ((g, \tilde{f}) + \overline{(g, \tilde{f})}) \\ &= \lambda \|g\|_2^2 - 2\Re(g, \tilde{f}) \end{aligned}$$

für alle reellen  $\lambda \neq 0$ . Lassen wir  $\lambda$ , sowohl von links, als auch von rechts, gegen null gehen, folgt also

$$\Re(g, \tilde{f}) = 0.$$

Die Funktion  $g \in N$  war beliebig; da mit  $g$  auch  $ig$  in  $N$  liegt, ist daher auch

$$\Re(ig, \tilde{f}) = \Re(i \cdot (g, \tilde{f})) = -\Im(g, \tilde{f}) = 0,$$

also verschwindet auch der Imaginärteil von  $(g, \tilde{f})$  und damit  $(g, \tilde{f})$  selbst.  $\tilde{f}$  steht daher in der Tat senkrecht auf allen  $g \in N$ .

$\tilde{f}$  ist nur bis auf eine Konstante bestimmt; wir wollen uns überlegen, daß

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} \cdot \tilde{f}$$

dasjenige Vielfache von  $\tilde{f}$  mit  $\tilde{T}_f = T$  ist:

Für  $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist

$$\begin{aligned} \tilde{T}_f(g) &= (g, \tilde{f}) = \left( g, \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} \cdot \tilde{f} \right) = \left( \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} \cdot \tilde{f}, g \right) \\ &= \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2}(g, \tilde{f}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist also  $\tilde{T}_f(g) = 0$  für alle  $g \in N$  nach Konstruktion von  $\tilde{f}$ .

Für ein Vielfaches  $\lambda \tilde{f}$  von  $\tilde{f}$  ist

$$\tilde{T}_f(\lambda \tilde{f}) = \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2}(\lambda \tilde{f}, \tilde{f}) = \frac{T(\tilde{f})}{\|\tilde{f}\|_2} \lambda \|\tilde{f}\|_2^2 = \lambda T(\tilde{f}) = T(\lambda \tilde{f}),$$

auch in diesem Fall stimmen  $\tilde{T}_f$  und  $T$  also überein. Wegen der Linearität von  $T$  und von  $\tilde{T}_f$  ist daher

$$\tilde{T}_f(g + \lambda \tilde{f}) = T(g + \lambda \tilde{f}) \quad \text{für alle } g \in N, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Eine beliebige Funktion  $h \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  können wir in der Form

$$h = \left( h - \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} \tilde{f} \right) + \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} \tilde{f}$$

darstellen. Da

$$T\left(h - \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} \tilde{f}\right) = T(h) - \frac{T(h)}{T(\tilde{f})} T(\tilde{f}) = T(h) - T(h) = 0$$

verschwindet, liegt der erste Summand in  $N$ , und der zweite ist natürlich ein Vielfaches von  $\tilde{f}$ . Also läßt sich jede quadratintegrierbare Funktion darstellen als Summe einer Funktion aus  $N$  und einem Vielfachen von  $\tilde{f}$ , die linearen Abbildungen  $T$  und  $\tilde{T}_f$  stimmen also überein.

Damit sind wir fast fertig: Wenn  $T = \tilde{T}_f$  ist, haben beide Abbildungen natürlich auch dieselbe Norm, und wir wissen bereits, daß  $\tilde{T}_f$  dieselbe Norm hat wie  $f$ , d.h.

$$\|T\| = \|\tilde{T}_f\| = \|f\|_2. \quad \blacksquare$$



FRIGYES RIESZ (1880–1956) studierte Mathematik in Budapest, Göttingen und Zürich. 1902 promovierte er in Budapest mit einer Arbeit über Geometries, 1911 wurde er Professor an der damals ungarischen Universität Kolozsvár. Nachdem Kolozsvár 1920 rumänisch wurde, zog er mit der Universität um nach Szeged. 1945 bekam er einen Lehrstuhl an der Universität Budapest.

RIESZ ist einer der Väter der *Funktionalanalysis*, jener mathematischen Disziplin also, die Funktionenräume mit analytischen Methoden untersucht und insbesondere auch fundamental für die FOURIER-Analyse ist. Den obigen Satz bewies er 1907.

**e) Die Plancherel-Formel**

Der Satz von RIESZ sagt uns, wann lineare Funktionen auf  $L^2(\mathbb{R}, C)$  in der Form  $\tilde{T}_f$  geschrieben werden können mit einer Funktion  $f$  aus  $L^2(\mathbb{R}, C)$ . Da wir die FOURIER-Theorie auf  $L^2(\mathbb{R}, C)$  zurückführen wollen auf die für Distributionen auf dem SCHWARTZ-Raum, müssen wir daher versuchen, solche Distributionen auf  $L^2(\mathbb{R}, C)$  fortzusetzen. Als erstes wollen wir uns dazu überlegen, daß wir jede Funktion aus  $L^2(\mathbb{R}, C)$  als Grenzwert einer Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum  $S(\mathbb{R})$  schreiben können.

Wir beginnen mit dem Beispiel des Rechteckimpulses

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

der offensichtlich in  $L^2(\mathbb{R}, C)$  liegt, wegen der beiden Unstetigkeitsstellen aber natürlich nicht in  $S(\mathbb{R})$ .

Wir kennen bereits eine Funktion in  $S(\mathbb{R})$ , die auch außerhalb des Intervalls  $[a, b]$  verschwindet und in dessen Innern positiv ist, nämlich die Funktion

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} -1 & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Allgemeiner hat für jede reelle Zahl  $r > 0$  auch

$$g_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} \frac{-r}{e^{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

dieselbe Eigenschaft. Da  $(t-a)(b-t)$  bei  $t = (a+b)/2$  maximal wird, hat  $g_r$  dort sein einziges Maximum und

$$g_r \left( \frac{a+b}{2} \right) = \frac{-4r}{e^{(b-a)^2}}.$$

Unser Rechteckimpuls hat eins als Maximalwert, deshalb betrachten wir besser anstelle der  $g_r$ , die mit dem Kehrwert des Maximums multiplizierten Funktionen

$$f_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} t \mapsto \begin{cases} \frac{4r}{e^{(b-a)^2}} e^{-(t-a)(b-t)} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

die alle bei  $(a+b)/2$  ihren Maximalwert eins annehmen.

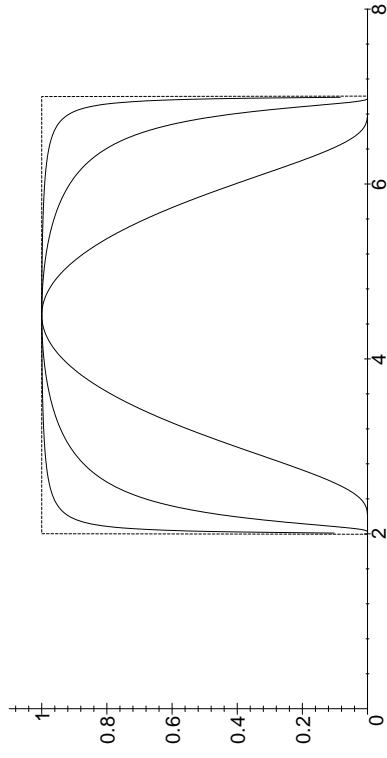


Abb. 24: Approximation des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen

Abbildung 24 zeigt für  $a = 2$  und  $b = 7$  die entsprechenden Funktionen mit  $r = 10$ ,  $r = 1$  und für  $r = 0,1$ . Die innerste Kurve für  $r = 10$  zeigt noch ein klar ausgeprägtes Maximum, die Kurve für  $r = 1$  ist schon deutlich flacher im mittleren Teil, und die für  $r = 0,1$  schließlich erinnert schon recht gut an den Rechteckimpuls  $f$ .

Diese Abbildung legt die Vermutung nahe, daß die  $f_r$  für  $r \rightarrow 0$  in der  $L^2$ -Norm gegen  $f$  konvergieren. Leider können wir aber  $\|f - f_r\|_2$  nicht ausrechnen, da wir keine Stammfunktion von  $f_r$  kennen. (Schon  $e^{-t^2}$  ist schließlich nicht elementar integrierbar.) Deshalb müssen wir uns mit Abschätzungen begnügen. Wir erwarten, daß  $f_r$  im mittleren Bereich immer besser mit der Geraden auf Höhe eins übereinstimmt, während es am Rand des Intervalls immer steiler gegen null geht. Daher wählen wir ein  $\delta > 0$  und betrachten getrennt den mittleren Teil  $[a + \delta, b - \delta]$  des Intervalls und die beiden Randintervalle  $[a, a + \delta]$  und  $[b - \delta, b]$ .

Über das Verhalten von  $f_r$  in den Randintervallen können wir so gut wie nichts sagen; wir wissen nur, daß auf jeden Fall  $0 \leq f_r(t) \leq 1$  ist und schätzen die Differenz zwischen  $f(t) = 1$  und  $f_r(t)$  daher ab durch eins.

Im mittleren Intervall ist die Differenz zwischen  $f(t)$  und  $f_r(t)$  im Intervallmittelpunkt  $(a + b)/2$  gleich null und wächst dann zu den Intervallenden hin monoton, da  $f_r$  selbst dort monoton fällt. Tatsächlich sieht man leicht, daß  $f_r$  monoton wachsend sowohl in  $t - a$  als auch in  $b - t$  ist; da beide Ausdrücke im Intervall  $[a + \delta, b - \delta]$  durch  $\delta$  nach unten beschränkt sind, ist  $f_r(t)$  in diesem Intervall daher überall mindestens gleich

$$\frac{4r}{e(b-a)^2} e^{-r} \frac{-r}{\delta(1-\delta)} = e^{-r} \left( \frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right).$$

Für alle  $t \in [a + \delta, b - \delta]$  ist daher

$$f(t) - f_r(t) \leq 1 - e^{-r} \left( \frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right).$$

Dieser Ausdruck ist noch nicht sehr angenehm; wir wollen ihn weiter abschätzen. Nach Konstruktion von  $f_r$  ist der Exponent negativ, und für alle  $x \geq 0$  ist  $1 - e^{-x} \leq x$ , denn dies gilt für  $x = 0$ , und die Ableitung

$e^{-x}$  von  $1 - e^{-x}$  ist für jedes positive  $x$  kleiner als die Ableitung eins von  $x$ . Daher ist für  $t \in [a + \delta, b - \delta]$

$$\begin{aligned} f(t) - f_r(t) &\leq 1 - e^{-r} \left( \frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right) \\ &\leq r \left( \frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2} \right). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns vor allem für kleine Werte von  $\delta$ ; deshalb betrachten wir im folgenden nur noch Werte  $\delta \leq \frac{1}{2}$ . Dann ist  $1 - \delta \geq \frac{1}{2}$  und

$$f(t) - f_r(t) \leq r \left( \frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2} \right).$$

Damit können wir die  $L^2$ -Norm der Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|^2 dt \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(t) - f_r(t)|^2 dt + \int_{b-\delta}^b |f(t) - f_r(t)|^2 dt \\ &\quad + \int_{b-\delta}^b |f(t) - f_r(t)|^2 dt \\ &\leq \delta + r^2(b-a) \left( \frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2} \right)^2 + \delta. \end{aligned}$$

Setzen wir hier speziell  $\delta = \sqrt{r}$ , was wir für hinreichend kleine  $r$  dürfen, so wird dies zu

$$\begin{aligned} &\sqrt{r} + r^2(b-a) \left( \frac{2}{\sqrt{r}} - \frac{4}{(b-a)^2} \right)^2 + \sqrt{r} \\ &= 2\sqrt{r} + r(b-a) \left( 2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2} \right)^2, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck geht gegen null für  $r \rightarrow 0$ . Also konvergieren die  $f_r$  für  $r \rightarrow \infty$  in der  $L^2$ -Norm gegen  $f$ .

Der Vollständigkeit halber wollen wir uns noch überlegen, daß auch die Fläche zwischen den Graphen von  $f_r$  und von  $f$  für  $r \rightarrow \infty$  gegen null geht: Wenn wir wie eben vorgehen, erhalten wir die Ungleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)| dt \leq \delta + r(b-a) \left( \frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2} \right) + \delta,$$

und wenn wir hier wieder spezialisieren auf  $\delta = \sqrt{r}$  wird dies zu

$$\sqrt{r} \left( 2 + (b-a) \left( 2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2} \right) \right),$$

was für  $r \rightarrow \infty$  gegen null geht.

Da  $f$  sowie sämtliche  $f_r$  außerhalb des Intervalls  $[a, b]$  verschwinden, geht damit auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)| dt$$

für  $r \rightarrow \infty$  gegen null. Dieses Integral bezeichnet man als die  $L^1$ -Norm von  $f - f_r$ ; die Folge der Funktionen  $f_r$  konvergiert also auch in der  $L^1$ -Norm gegen  $f$ .

Diese Annäherung des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen wollen wir im nächsten Lemma auf beliebige quadratintegrierbare Funktionen ausdehnen:

**Lemma:** Zu jeder Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  gibt es eine Folge von Funktionen  $\varphi_n \in S(\mathbb{R})$ , so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_2 = 0$$

ist;  $f$  läßt sich also bezüglich der  $L^2$ -Norm beliebig gut durch stark abfallende Funktionen annähern.

*Beweis:* In einem ersten Schritt sollten wir uns überlegen, daß  $f$  bezüglich der  $L^2$ -Norm als Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen  $\tau_n$  mit jeweils nur endlich vielen Sprungstellen dargestellt werden kann.

Da  $f$  nach Voraussetzung integrierbar ist, können wir die Funktion zumindest auf jedem endlichen Intervall durch solche Treppenfunktionen annähern, und indem wir die Intervallgrenzen gegen unendlich gehen lassen, gilt dasselbe für ganz  $f$ . Der Beweis, daß wir so eine Folge von Treppenfunktionen bekommen, die *bezüglich der  $L^2$ -Norm* gegen  $f$  konvergiert ist ziemlich technisch und muß die ganze Konstruktion des RIEMANN-Integrals nachvollziehen; wir wollen daher auf die Einzelheiten verzichten und obige Aussage einfach glauben.

Jede der Treppenfunktionen  $\tau_n$  ist eine Summe von endlich vielen Rechteckimpulsen  $R_{ni}$ , von denen wiederum jeder als Grenzwert einer Folge  $(\psi_{nij})_{j \in \mathbb{N}}$  stark abfallender Funktionen geschrieben werden kann. Mit

$$\varphi_{nj} = \sum_i \psi_{nij}$$

ist dann auch

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{nj} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_i \psi_{nij} = \sum_i R_{ni} = \tau_n,$$

denn die Summen über  $i$  sind endlich. Genau deshalb liegen die Funktionen  $\varphi_{ni}$  auch in  $S(\mathbb{R})$ , und damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{nn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = f,$$

wie behauptet. ■

**Korollar:** Zu jeder Distribution  $T: S(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es eine stetige lineare Abbildung  $\tilde{T}: L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , die auf  $S(\mathbb{R})$  mit  $T$  übereinstimmt.

*Beweis:* Jede Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  läßt sich als Limes einer Folge  $\varphi_n$  stark abfallender Funktionen schreiben; wir setzen einfach

$$\tilde{T}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(\varphi_n).$$

■

Damit haben wir alle Vorbereitungen zusammen und können endlich beweisen, worauf es wirklich ankommt:

**Satz von Plancherel:** a) Zu jeder Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  gibt es Funktionen  $\hat{f}$  und  $\check{f}$  in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , so daß

$$\hat{T}_f = T_{\hat{f}} \quad \text{und} \quad \check{T}_f = T_{\check{f}}$$

ist; FOURIER-Transformierte und inverse FOURIER-Transformierte von  $f$  existieren also als Funktionen.

b) Falls die rechten Seiten existieren, kann man

$$\check{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad \text{und} \quad \check{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

setzen.

c)  $\check{f}$  und  $f$  unterscheiden sich höchstens durch eine Nullfunktion.

$$d) \|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2 \quad \text{und} \quad \|\check{f}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2.$$

**Beweis:** Nach der CAUCHY-SCHWARZSchen Ungleichung ist für jede stark abfallende Funktion  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$|\hat{T}_f(\varphi)| = |T_f(\hat{\varphi})| = |(f, \hat{\varphi})| \leq \|f\|_2 \|\hat{\varphi}\|_2.$$

Wie wir aus §7c) wissen, ist  $\|\hat{\varphi}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|\varphi\|_2$ , also

$$|\hat{T}_f(\varphi)| \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2 \|\varphi\|_2.$$

Nach dem Satz von RIESZ gibt es daher eine Funktion  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , für die

$$\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$$

ist. Falls das FOURIER-Integral existiert, wissen wir aus der Diskussion zu Beginn von §8c), daß wir für  $\check{f}$  die so definierte Funktion nehmen können.

In jedem Fall ist die Norm von  $\hat{f}$  gleich der von  $\check{T}_f$ , also ist nach obiger Abschätzung

$$\|\hat{f}\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_2.$$

Genauso zeigt man auch die Existenz von  $\check{f}$  und daß gilt

$$\|\check{f}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2.$$

Da die Distributionen  $\check{T}$  und  $T$  übereinstimmen, unterscheiden sich  $\check{f}$  und  $f$  höchstens durch eine Nullfunktion, haben also insbesondere dieselbe Norm. Nach den bislang bewiesenen Ungleichungen ist

$$\|\check{f}\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2 \leq \|f\|_2;$$

da links und rechts dieselbe Zahl steht, muß in beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen gelten, und der Satz ist bewiesen. ■



MICHEL PLANCHEREL (1885–1967) war Professor für höhere Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, publizierte seine Arbeiten aber in französischer Sprache. Diese befassen sich nicht nur mit der FOURIER-Theorie einer und mehrerer Veränderlicher, sondern enthalten beispielsweise auch wichtige Sätze aus der sogenannten Ergodentheorie, der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme. Seine letzte, 1962 erschienene Arbeit, befaßt sich mit dem Einfluß der Steuergesetze auf die Stabilität einer Volkswirtschaft. Den obigen Satz bewies er 1910; oft wird auch nur dessen letzte Aussage als PLANCHEREL-Formel bezeichnet.

Der gerade bewiesene Satz sagt uns also, daß die FOURIER-Transformation auch auf  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  zumindest bis auf Nullfunktionen wohldefiniert ist, was für die meisten Zwecke genügt. Außerdem gibt er uns eine Aussage über die Normen, die dem Satz von PARSEVAL aus der Theorie der FOURIER-Reihen periodischer Funktionen entspricht, und die Aussage, daß FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation zumindest bis auf Nullfunktionen tatsächlich invers zueinander sind.

Gelegentlich wollen wir aber die FOURIER-Transformation an einer bestimmten Stelle wirklich kennen, und dazu ist der obige Satz zu schwach: Da die Distribution  $T_f$  die Funktion  $F$  nur bis auf Nullfunktionen eindeutig bestimmt, legt  $T_f$  für kein einziges Argument  $t$  den Wert  $f(t)$  wirklich fest.

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir uns überlegen, daß auch der Funktionswert von  $f$  an allen Stetigkeitsstellen von  $f$  durch  $T_f$  eindeutig bestimmt ist.

Wir gehen dazu aus von zwei stückweise stetige Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $T_f = T_g$  ist. Für jede stark abfallende Funktion  $\varphi$  ist dann

$$T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\varphi(t) dt.$$

Dies wollen wir anwenden auf die zu Beginn dieses Abschnitt betrachteten Funktionen und dort einfach mit  $f_r$  bezeichneten Funktionen

$$\varphi_{a,b,r}: \begin{cases} t \mapsto 0 & \text{falls } a < t < b \\ t \mapsto \frac{4r}{e^{(b-a)^2} e^{(t-a)(b-t)}} & \text{sonst} \end{cases},$$

von denen wir dort gezeigt hatten, daß sie für feste Werte von  $a, b$  und ein variables  $r > 0$  für  $r \rightarrow 0$  gegen den Rechteckimpuls

$$R_{a,b}: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

konvergieren. Diese Konvergenz haben wir sowohl bezüglich der  $L^2$ -Norm als auch bezüglich der  $L^1$ -Norm nachgerechnet. Wegen letzterer können wir aus den Gleichungen

$$T_{f_r}(\varphi_{a,b,r}) = T_g(\varphi_{a,b,r})$$

oder

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)R_{a,b}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)R_{a,b}(t) dt$$

schließen, daß auch

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt \quad \text{für alle } a, b.$$

Als integrierbare Funktionen haben  $f$  und  $g$  Stammfunktionen  $F$  und  $G$ ; damit ausgedrückt ist

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

(Strenggenommen haben wir das nur gezeigt für  $b > a$ , aber im Falle  $b < a$  können wir einfach obige Überlegung für das Intervall  $[b, a]$  wiederholen.) Setzen wir  $b = a + h$ , so gilt daher auch

$$F(a+h) - F(a) = G(a+h) - G(a)$$

und

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \frac{G(a+h) - G(a)}{h}$$

für alle  $a, h \in \mathbb{R}$  mit  $h \neq 0$ .

Lassen wir in dieser Gleichung  $h$  gegen null gehen, erhalten wir, sofern  $F$  bzw.  $G$  im Punkt  $a$  differenzierbar ist, den Wert der jeweiligen Ableitung im Punkt  $a$ .

Falls die Funktionen  $f$  und  $g$  in der Umgebung eines Punktes stetig sind, habe sie dort differenzierbare Stammfunktionen und sind gleich deren Ableitungen; damit ist

$$f(t) = g(t) \quad \text{falls } f \text{ und } g \text{ im Punkt } t \text{ stetig sind.}$$

Die Funktionen  $f$  und  $g$  können sich also höchstens an ihren Unstetigkeitsstellen unterscheiden.

Sind  $f$  und  $g$  sogar stetig, ist also  $f = g$ , und das gilt auch, wenn sowohl  $f$  als auch  $g$  nur stückweise stetig sind und zusätzlich die in §4e) betrachtete Mittelwerteneigenschaft

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad \text{und} \quad g(t) = \frac{g(t^+) + g(t^-)}{2}$$

erfüllen, denn die links- und rechtsseitigen Grenzwerte hängen nur von den Werten ab, die  $f$  und  $g$  Funktionen an den Stellen annehmen, an denen sie stetig sind.

Das wird uns in den meisten Fällen reichen, insbesondere wenn wir uns auf absolut integrierbare Funktionen beschränken:

**Lemma:** Ist die Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  absolut integrierbar, so existiert die FOURIER-Transformierte von  $f$  als Funktion; diese Funktion ist stetig und beschränkt.

*Beweis:* Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt.$$

Der Betrag des Integranden ist  $|f(t)|$ ; da  $f$  absolut integrierbar ist, konvergiert das Integral absolut und ist damit insbesondere konvergent.

Der Integrand  $f(t)e^{-i\omega t}$  ist als Funktion von  $\omega$  für jeden Wert von  $t$  stetig und als Funktion von  $t$  immerhin noch stückweise stetig. Daher zeigt das Lemma aus §6a) zunächst, daß für Intervalle  $[a, b]$ , in denen  $f$  stetig ist, auch

$$\int_a^b f(t)e^{-i\omega t} dt$$

eine stetige Funktion von  $\omega$  ist. Damit gilt dasselbe für jedes endliche Intervall, denn endliche Summen stetiger Funktionen sind wieder stetig. Für  $a \rightarrow -\infty$  und  $b \rightarrow \infty$  schließlich konvergiert das Integral nach Voraussetzung absolut, also auch gleichmäßig, und damit ist auch die Grenzfunktion  $\widehat{f}(\omega)$  stetig und beschränkt. ■

Damit folgt insbesondere der z.B. für die Identifikation von Lösungen von Differentialgleichungen wichtige

**Satz:**  $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  seien stetige Funktionen.

- a) Falls die FOURIER-Transformierten  $\widehat{f}$  und  $\widehat{g}$  übereinstimmen, ist  $f = g$ .  
 b) Falls es ein  $r > 0$  gibt, so daß  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re s = r$ , ist  $f(t) = g(t)$  für alle  $t > 0$ .

- Beweis:* a) folgt unmittelbar aus dem gerade bewiesenen Lemma, und b) folgt daraus, daß man dieses Lemma auf die Funktionen

$$f_r: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

und

$$g_r: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ g(t)e^{-rt} & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

anwendet, die zumindest für  $t > 0$  stetig sind, und deren FOURIER-Transformationen gerade die LAPLACE-Transformationen von  $f$  und  $g$  für  $\Re s = r$  sind. ■

## f) Ableitungen von Distributionen

Wie wir in §6b) gesehen haben, ist für alle mindestens  $r$ -fach stetig differenzierbare Funktionen  $f$ , sofern alle vorkommenden FOURIER-Transformierten existieren,

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega);$$

eine ähnliche, leicht komplexere Formel gilt auch für die LAPLACE-Transformation. Dies hatten wir im weiteren Verlauf von §6 zur Lösung erster Differentialgleichungen verwendet.

Inzwischen können wir die Voraussetzungen etwas präziser formulieren; insbesondere ist klar, daß diese Formeln für alle stark abfallenden Funktionen und alle  $r \in \mathbb{N}$  gelten. Auch wissen wir, daß sie für quadratintegrierbare Funktionen gelten, falls auch alle Ableitungen bis zur jeweils betrachteten quadratintegrierbar sind.

In diesem Paragraphen wollen wir uns überlegen, wie man diesen Formeln auch für beliebige quadratintegrierbare Funktionen mit Hilfe von Distributionen zumindest bis auf Nullfunktionen einen Sinn geben kann.

Dazu überlegen wir uns zunächst, was Ableitungen auf dem Niveau der Distributionen bedeuten, wie man also beispielsweise eine Ableitung der DIRACSchen  $\delta$ -Distribution definieren kann. Es ist klar, daß ein Ansatz wie

$$\delta'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h}$$

zu keinem vernünftigen Ergebnis führen kann; wir müssen unserer alten Strategie folgen und für eine differenzierbare Funktion  $f$  die Distribution  $T_f$  ausrechnen in der Hoffnung, daß dies zu einer Formel führt, die sich auf beliebige Distributionen verallgemeinern läßt.

Für eine differenzierbare Funktion  $f$  mit der Eigenschaft, daß sowohl  $f$  als auch die Ableitung  $\dot{f}$  höchstens polynomiales Wachstum haben, ist

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t) dt.$$

definiert und nach der Regel für partielle Integration ist

$$T_f(\varphi) = f(t)\varphi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t) dt.$$

Da  $f$  höchstens polynomiales Wachstum hat, ist  $|f(t)|$  kleiner oder gleich einem Ausdruck der Form  $c|t|^k$  für eine reelle Zahl  $c > 0$  und eine natürliche Zahl  $k$ . Da außerdem  $\varphi$  eine stark abfallende Funktion ist, bleibt  $|t^{k+1}\varphi(t)|$  beschränkt für alle  $t$ , d.h.

$$|\varphi(t)| \leq \frac{M}{|t|^{k+1}}$$

für eine reelle Zahl  $M > 0$ . Damit ist

$$|f(t)\varphi(t)| \leq ct^k \cdot \frac{M}{t^{k+1}} \leq \frac{cM}{|t|}.$$

Somit geht das Produkt  $\varphi(t)f(t)$  gegen Null für  $t \rightarrow \pm\infty$  und

$$T_f(\varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\dot{\varphi}(t) dt = -T_f(\dot{\varphi}).$$

Damit ist klar, wie wir die Ableitung einer Distribution definieren:

**Definition:** Die Ableitung einer Distribution  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  ist die Distribution

$$\dot{T}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto -T_f(\dot{\varphi}) \end{cases},$$

die  $n$ -te Ableitung entsprechend

$$T^{(n)}: \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto (-1)^n T_f(\varphi^{(n)}) \end{cases}.$$

Zum Nachweis, daß  $\dot{T}$  und allgemeiner auch  $T^{(n)}$  Distributionen sind, müssen wir zeigen, daß dies lineare Abbildungen sind – angesichts der Linearität der Differentiation ist das klar. Zum Nachweis der Stetigkeit aber müssen wir wissen, daß für eine konvergente Folge von Funktionen aus dem SCHWARTZ-Raum auch die Folge der abgeleiteten Funktionen konvergiert; dies gilt nur deshalb, weil wir die Konvergenz im SCHWARTZ-Raum so definiert haben, daß auch alle Ableitungen und deren Produkte mit  $t$ -Potenzen konvergieren müssen.

Beispielsweise ist also für die DIRAC-Distribution

$$\Delta_a^{(n)}(\varphi) = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$$

oder, mit der  $\delta$ -„Funktion“ ausgedrückt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-a)\varphi(t) dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(a).$$

Auch Sprungfunktionen wie

$$\vartheta: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

lassen sich in der schönen neuen Welt der Distributionen problemlos differenzieren:

$$T_\vartheta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\varphi(t) dt = \int_0^{\infty} \varphi(t) dt$$

hat als Ableitung die Distribution  $\dot{T}_\vartheta$  mit

$$\dot{T}_\vartheta(\varphi) = - \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t)\dot{\varphi}(t) dt = - \int_0^{\infty} \dot{\varphi}(t) dt = -\varphi(t) \Big|_0^{\infty} = \varphi(0),$$



da  $\varphi(t)$  bei einer stark abfallenden Funktion für  $t \rightarrow \infty$  gegen null geht. Diese Distribution kennen wir aber: Es ist gerade die DIRAC-Distribution  $\Delta_0$ . Also ist

$$\hat{T}_\varphi = \Delta_0,$$

was sich in Funktionen ausgedrückt (mit aller gebotenen Vorsicht) auch als

$$\dot{\vartheta}(t) = \delta(t)$$

schreiben läßt. Entsprechend lassen sich im Distributionensinne auch andere Sprungfunktionen differenzieren; die Ableitung an einer Sprungstelle  $t = t_0$  ist jeweils Sprunghöhe mal  $\delta(t - t_0)$ .

Auch mit der Ableitung der Betragsfunktion haben wir auf Distributionenniveau keine Probleme: Für  $f(t) = |t|$  zeigt partielle Integration, daß

$$\begin{aligned} \hat{T}_f(\varphi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^0 t \cdot \varphi(t) dt - \int_0^{\infty} t \cdot \varphi(t) dt \\ &= t\varphi(t) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt - t\varphi(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^0 \varphi(t) dt + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt = T_g(\varphi) \end{aligned}$$

mit

$$g(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

An der Stelle  $t = 0$  können wir einen beliebigen Funktionswert wählen, denn  $T_g$  hängt nicht von diesem Wert ab. Wir bekommen also für  $t \neq 0$ , wo  $f(t) = |t|$  differenzierbar ist, die erwarteten Ergebnisse, und für  $t = 0$  keine Aussage. Nichtsdestoweniger ist die *Distribution*  $\hat{T}_f$  wohldefiniert. Auf dem Niveau der Distributionen sind Ableitungen also auch für nur stückweise differenzierbare Funktionen problemlos.

Das Produkt einer Distribution mit einer beliebig oft stetig differenzierbaren Funktion mit höchstens polynomialem Wachstum haben wir

bereits definiert; das können wir insbesondere anwenden auf die Funktion

$$\Pi_r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad t \mapsto t^r.$$

Wir erwarten

**Lemma:** Für jede Distribution  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  und jede natürliche Zahl  $r$  ist

$$\hat{T}^{(r)} = (-i)^r \widehat{\Pi_r T} \quad \text{und} \quad \Pi_r \hat{T} = (-i)^r \widehat{T^{(r)}}.$$

*Beweis:* Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt nach den entsprechenden Formeln für stark abfallende Funktionen aus §6b)

$$\begin{aligned} \hat{T}^{(r)}(\varphi) &= (-1)^r \widehat{T(\varphi^{(r)})} = (-1)^r T(\widehat{\varphi^{(r)}}) = (-1)^r T(i^r T(i^r \widehat{\varphi})) \\ &= (-i)^r T(\Pi_r \widehat{\varphi}) = (-i)^r \Pi_r T(\widehat{\varphi}) = (-1)^r \widehat{\Pi_r T}(\varphi), \end{aligned}$$

denn aus der Formel  $\omega^r \widehat{\varphi}(\omega) = (-i)^r \widehat{\varphi^{(r)}}(\omega)$  folgt

$$\widehat{\varphi^{(r)}}(\omega) = i^r \omega^r \widehat{\varphi}(\omega).$$

Entsprechend zeigt man auch die zweite Formel

$$\begin{aligned} \Pi_r \hat{T}(\varphi) &= \widehat{T(\Pi_r \varphi)} = T(\widehat{\Pi_r \varphi}) = T(i^r \widehat{\varphi^{(r)}}) \\ &= i^r T(\widehat{\varphi^{(r)}}) = (-i)^r T^{(r)}(\widehat{\varphi}) = (-i)^r \widehat{T^{(r)}}(\varphi). \end{aligned}$$

Rückübersetzt für Funktionen heißt das, daß die Formeln

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r t^r \widehat{f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r f^{(r)}(\omega);$$

zumindest bis auf Nullfunktionen auch dann für quadratintegrierbare Funktionen gelten, wenn diese nur im Distributionensinn differenzierbar sind. Die entsprechende Formel für die LAPLACE-Transformation, die zusätzlich die Funktions- und Ableitungswerte an der Stelle Null enthält, ist natürlich (auch modulo Nullfunktionen) nur dann sinnvoll, wenn diese Werte wohldefiniert sind.

### g) Faltungen

Bei der Untersuchung von FOURIER-Reihen in §4a) erwies sich die (periodische) Faltung zweier Funktionen als wichtiges Instrument zum Nachweis der Konvergenz; außerdem war sie oft nützlich, um ohne großen Aufwand neue FOURIER-Reihen aus bekannten herzuleiten.

Hier im nichtperiodischen Fall ist sie einfacher und anschaulicher zu verstehen als im periodischen Fall:  $f(\star g)(t)$  ist einfach das gewichtete Mittel der Funktionswerte von  $f$  in der Umgebung von  $t$ , wobei  $g$  die Gewichtsfunktionen ist. Am einfachsten ist es, wenn man sich  $g$  als eine Funktion vorstellt, die im Punkt Null ein Maximum hat und dann nach beiden Seiten monoton abfällt; dann kann man sich  $f \star g$  als eine „verschmierte“ (oder auch geglättete) Version von  $f$  vorstellen. Indem man für  $g(t)$  GAUSSsche Glockenkurven nimmt, kann man beispielsweise unscharfe (oder weichgezeichnete) Photographien simulieren – je größer der Parameter  $\sigma$ , desto unschärfer ist das Resultat.

Für die formale Definition lassen wir allerdings beliebige Funktionen  $f$  und  $g$  zu; später werden wir sogar Faltungen von Funktionen mit Distributionen betrachten.

**Definition:** Für zwei Funktionen  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt

$$f \star g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s) ds \end{cases},$$

falls dieses Integral existiert, *Faltung* von  $f$  mit  $g$ .

**Lemma:** Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  existiert die Faltung  $f \star g$ .

*Beweis:* Mit  $f$  liegt für jedes  $t \in \mathbb{R}$  auch die Funktion  $s \mapsto f(t-s)$  in  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ; die Abschätzungen aus §8a) zeigen daher die Existenz des Integrals  $f \star g(t)$ . ■

Ebenfalls in völliger Analogie zum periodischen Fall gilt

**Lemma:** Falls die FOURIER-Transformationen von  $f, g$  und von  $h(t) = (f \star g)(t)$  als Funktionen existieren, ist  $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$ .

*Beweis:* Nach dem Satz von FUBINI ist

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) ds \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) g(s) e^{-i\omega t} dt \right) ds \\ &= \int_{u=t-s}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(s) e^{-i\omega(u+s)} du \right) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) g(s) e^{-i\omega s} ds \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-i\omega s} ds \right) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega), \end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Als erste Anwendung hiervon können wir die FOURIER-Transformierte eines Produkts durch die FOURIER-Transformierten der Faktoren ausdrücken:

**Korollar:**  $\widehat{f g}(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f} \star \widehat{g})(\omega)$ .

*Beweis:* Wir wenden das gerade bewiesene Lemma an auf die FOURIER-Transformierten von  $f$  und  $g$ ; dann ist

$$\widehat{f \star g}(t) = \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t).$$

Wie wir wissen, unterscheiden sich FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation durch den Faktor  $1/2\pi$  vor der inversen

Transformation und das Vorzeichen des Argument, d.h.

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi \cdot f(-t), \quad \widehat{\widehat{g}}(t) = 2\pi \cdot g(-t) \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{f \star g}}(t) = 4\pi^2 \cdot f(-t)g(-t).$$

Aus dem gleichen Grund ist  $\widehat{\widehat{f \star g}}(t) = 2\pi \cdot (\widehat{f \star g})(-t)$ , also

$$2\pi \cdot (\widehat{f \star g})(-t) = 4\pi^2 \cdot \widehat{f}g(-t) \quad \text{oder} \quad \widehat{f}g(-t) = \frac{1}{2\pi} (\widehat{f \star g})(-t).$$

Dies gilt für alle reellen Zahlen  $t$ , deshalb können wir das Minuszeichen links und rechts auch weglassen und haben dann die Behauptung des Korollars. ■

Wie im periodischen Fall folgt auch, daß die Faltung (abgesehen von eventuell vorhandenen Unstetigkeitsstellen) kommutativ und assoziativ ist:

$$f \star g = g \star f \quad \text{und} \quad f \star (g \star h) = (f \star g) \star h,$$

denn für die FOURIER-Transformationen der beiden Seiten sind jeweils gleich nach dem Kommutativitätsgesetz und Assoziativitätsgesetz für die Multiplikation komplexer Zahlen.

Eine weitere interessante Konsequenz dieses Lemmas ist, daß sich Faltungen gelegentlich rückgängig machen lassen:  $f \star g$  ist durch seine FOURIER-Transformation  $\widehat{f \star g}$  (fast überall) bestimmt; falls  $g(\omega)$  keine Nullstellen hat, kann man die Multiplikation mit  $g(\omega)$  durch eine Division rückgängig machen. Eine Grundidee zum Rückgängigmachen der Faltung wäre also die folgende: Ist  $h(t)$  die inverse FOURIER-Transformation von  $1/\widehat{g}(\omega)$ , so hat  $(f \star g) \star h$  FOURIER-Transformierte

$$\widehat{(f \star g) \star h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \cdot \frac{1}{\widehat{g}(\omega)} = \widehat{f}(\omega),$$

$(f \star g) \star h$  stimmt also fast überall mit  $f$  überein.

Leider ist die Sache aber doch nicht ganz so einfach, denn die Existenz von  $h$  ist alles andere als klar: Für eine stark abfallende Funktion  $g(\omega)$  ist  $1/g(\omega)$  „stark ansteigend“, und natürlich gibt es auch Probleme mit den Nullstellen von  $g$ . Die Mathematik kennt jedoch eine ganze Reihe von Regularisierungstechniken, mit denen man solche Probleme umgehen kann. Insbesondere kann man für praktische Zwecke sowohl

den Frequenzbereich, über den integriert wird, als auch den Zeit- oder Ortsbereich oft abschneiden, so daß nur ein Integral über ein endliches Intervall betrachtet werden muß.

Die Formel, die wir gerade benutzt haben, gelten, wenn man solche Techniken benutzt, natürlich nicht mehr exakt, aber doch oft mit einer Genauigkeit, die für praktische Zwecke völlig ausreicht. So konnte beispielsweise die NASA die Bilder des falsch fokussierten HUBBLE-Teleskops durch digitale Nachbehandlung so deutlich verbessern, daß die Bildqualität auch vor der Reparatur nicht viel schlechter war als bei einem korrekt fokussierten Teleskop.

Eine neuere Anwendung ist die sogenannte *brennpunktfreie Optik*, die von CMD Optics in Boulder, Colorado entwickelt wurde. Dort benutzt man eine (von Zeiss speziell zu diesem Zweck konstruierte) Linse ohne Brennpunkt; parallele einfallende Strahlen gehen also *nicht* durch denselben Punkt der Bildebene, so daß grundsätzlich jedes Bild unscharf ist. Diese Unschärfe wird durch digitale Nachbearbeitung in der oben skizzierten Weise so gut es geht kompensiert.

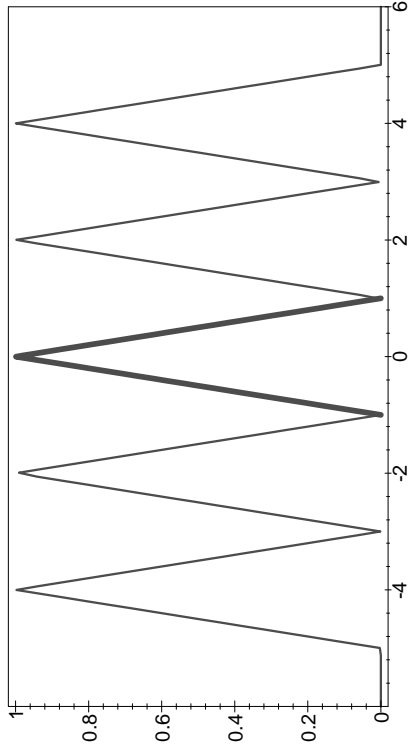
Zweck dieser auf den ersten Blick unsinnigen Vorgehensweise ist die Erhöhung der Tiefenschärfe: Ein klassisches optisches System bildet, insbesondere wenn es mit wenig Licht auskommen muß und daher eine große Blende braucht, nur in einem sehr kleinen Entfernungsbereich scharf ab. Die brennpunktfreie Linse bildet natürlich überhaupt nirgends scharf ab, aber das Gesamtsystem aus Linse und digitaler Nachbearbeitung liefert scharfe Bilder aus einem deutlich größeren Entfernungsbereich als dies mit konventioneller Optik möglich ist.

Besonders einfach sind Faltungen mit  $\delta$ -Funktionen zu berechnen: Für  $\eta(t) = \delta(t - t_0)$  zeigt die Substitutionsregel mit  $u = t - t_0 - s$ , daß

$$\eta \star f = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0 - s)g(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)g(t - t_0 - u)du = g(t - t_0)$$

ist, Faltung mit  $\delta(t - t_0)$  verschiebt also einfach das Argument um  $t_0$ . Insbesondere ist  $\delta \star f = f$ .

Im Falle einer Funktion, die außerhalb eines gewissen Intervalls null (oder praktisch null) ist, läßt sich durch Faltung mit einer Summe von

Abb. 25: Faltung eines Dreiecksimpuls mit einer Summe von  $\delta$ -Distributionen

$\delta$ -Funktionen der Graph an verschiedene Stellen verschoben; Abbildung 25 zeigt dies für die Faltung eines (fett eingezeichneten) Dreiecksimpulses auf  $[-1, 1]$  und die Distribution

$$\delta(t - 4) + \delta(t - 2) + \delta(t) + \delta(t + 2) + \delta(t + 4).$$

## h) Der Abtastatz von Nyquist

Egal ob es um die automatische Erfassung von Meßwerten geht oder um die Aufzeichnung von Musik: Die digitale Darstellung analoger Daten ist wesentlicher Bestandteil der Informationsverarbeitung. Nun ist aber eine beliebige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sicherlich nicht durch ihre Funktionswerte an endlich vielen Stellen oder auch an ein einer diskreten Menge von Stellen bestimmt: Auch wenn wir wissen, daß  $f(t) = 0$  ist für jedes ganzzahlige Vielfache von 0,001, wissen wir noch nicht, daß  $f$  die Nullfunktion ist: Auch die Funktionen  $f(t) = \sin(1000\pi t)$  und  $f(t) = -3 \sin(5000\pi t)$  haben diese Eigenschaft. Auch bei von null verschiedenen Abtastwerten tritt dieses Problem auf: Beispielsweise stimmen auch die Funktionen  $f(t) = \cos(500\pi t)$  und  $g(t) = \cos(1500\pi t)$  für alle ganzzahligen Vielfachen von 0,001 überein, aber sie nehmen hier abwechselnd die Werte 1, 0, -1, 0 an; siehe Abbildung 26. Da der Frequenzunterschied zwischen den beiden Schwingungen fast dem zwi-

schen Baß und Sopran entspricht, ist klar, daß man die beiden Schwingungen zumindest auf einer Musik-CD nicht miteinander verwechseln darf.

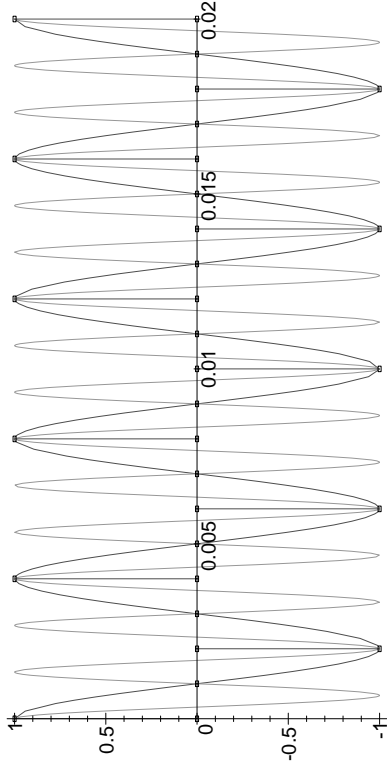


Abb. 26: Abtastung zweier Schwingungen

Die Probleme bei den obigen Beispielen beruhen offensichtlich darauf, daß es zu jedem gegebenen Signal auch höherfrequente Signale gibt, die an vorgegebenen Abtastpunkten mit ihm übereinstimmen; eine eindeutige Rekonstruktion ist höchstens dann möglich, wenn man eine Grenze festlegt, oberhalb derer Frequenzen nicht mehr berücksichtigt werden sollen. Der Abtastatz von NYQUIST sagt, daß dann in der Tat eine Rekonstruktion möglich ist, und er sagt auch, wo die Grenze liegen soll, oberhalb derer man die Frequenzen abschneiden muß: Die Abtastfrequenz muß mehr als doppelt so hoch sein als die höchste im Signal vorkommende Frequenz.

Die genaue Formulierung des Satzes ist etwas technischer; insbesondere müssen wir berücksichtigen, daß die Kreisfrequenz  $\omega$ , mit der wir immer arbeiten, etwas anderes ist, als die Frequenz: Eine reine Schwingung mit einer Frequenz von 1000 Hz ist nicht gegeben durch eine Funktion wie  $\sin 1000t$ , sondern – bei in Sekunden gemessener Zeit – durch  $\sin 2000\pi t$ . Entsprechend kommt auch jetzt bei der Formulierung des Abtastatzes von NYQUIST ein Faktor  $2\pi$  ins Spiel:

**Satz:**  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  habe die Eigenschaft, daß  $\hat{f}(\omega)$  außerhalb eines Intervalls der Länge  $\Omega$  verschwinde. Dann ist  $f$  eindeutig bestimmt durch die Werte  $f(2k\pi/\Omega)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis:*  $(\omega_1, \omega_2)$  sei ein Intervall der Länge  $\Omega$  derart, daß  $\hat{f}(\omega)$  außerhalb dieses Intervalls verschwindet. Dann ist bis auf eine Nullfunktion

$$f(t) = \check{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Indem wir  $f$  durch die rechte Seite ersetzen (was nichts wesentliches ändert) können wir annehmen, daß diese Gleichung wirklich gilt. Also ist insbesondere

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \hat{f}(\omega) e^{2k\pi i\omega/\Omega} d\omega. \quad (*)$$

Nun betrachten wir jene Funktion  $g(\omega)$ , die auf dem Intervall  $[\omega_1, \omega_2)$  mit  $\hat{f}(\omega)$  übereinstimmt und die periodisch mit Periode  $\Omega$  in  $\omega$  auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt ist. Für diese Funktion ist natürlich auch

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{2k\pi i\omega/\Omega} d\omega,$$

denn im Integrationsintervall stimmen  $\hat{f}$  und  $g$  überein.

$g$  als periodische Funktion in  $\omega$  mit Periode  $\Omega$  hat eine Darstellung als **FOURIER-Reihe**

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\lambda\omega} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\Omega};$$

der  $k$ -te **FOURIER-Koeffizient** ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{-ik\lambda\omega} d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega) e^{-2\pi i\omega k/\Omega} d\omega \\ &= \frac{2\pi}{\Omega} f\left(\frac{-2k\pi}{\Omega}\right), \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen  $(*)$  gilt.

Durch die Werte  $f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right)$  sind also alle **FOURIER-Koeffizienten** von  $g$  bestimmt, damit auch (fast überall) die Funktion  $g(\omega)$ , und damit auch die Funktion  $\hat{f}(\omega)$ , die im Intervall  $[\omega_1, \omega_2)$  mit  $g(\omega)$  übereinstimmt und außerhalb (außer eventuell im Punkte  $\omega_2$ ) verschwindet. Damit ist auch  $f(t) = \check{f}(t)$  fast überall durch diese Werte bestimmt. ■



**HARRY NYQUIST** (1889–1976) wurde in Schweden geboren, arbeitete aber ab Anfang der zwanziger Jahre bei den Bell Laboratories; das Bild zeigt ihn um 1960 mit seinen dortigen Kollegen **JOHN PIERCE** (*links*) und **RUDOLF KOMPNER** (*Mitte*). Seine Arbeit von 1924 über die Übertragungsgeschwindigkeit von Telegraphen gilt als eine der Begründungen der Informationstheorie. Den **Abtatsatz**, den **CAUCHY** bereits 1841 postuliert hatte, bewies er 1928. Weitere wichtige Arbeiten befassen sich mit der quantitativen Erforschung des thermischen Rauschens und der Stabilität von Verstärkern.

Bei praktischen Anwendungen dieses Satzes wird  $f(t)$  im allgemeinen eine reelle Funktion sein; dann verschwindet

$$\begin{aligned} \hat{f}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{f(t) e^{-i\omega t}}} dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt} = \overline{\hat{f}(\omega)} \end{aligned}$$

genau dann, wenn auch  $\hat{f}(\omega)$  verschwindet. Daher wird in diesem Fall alles einfacher, wenn man das Intervall, außerhalb dessen  $\hat{f}(\omega)$  verschwindet, symmetrisch zum Nullpunkt wählen kann, also von der Form  $(-\omega_0, \omega_0)$ . Die zur Kreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  gehörende Frequenz  $\nu_0$  wird in diesem Zusammenhang oft als **Bandbreite** bezeichnet. Hier ist  $\Omega = 2\omega_0$ , zur Rekonstruktion der Funktion  $f$  brauchen wir also die Funktionswerte

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ein Signal der Bandbreite  $\nu_0$  muß also mit einer Frequenz von mindestens  $2\nu_0$  abgetastet werden, damit man es eindeutig rekonstruieren kann.

Bekanntestes Beispiel hierfür sind Musik-CDs: Praktisch niemand kann Töne mit Frequenzen von mehr als 20kHz hören; für Aufnahmen auf CD wird 44 100 Mal pro Sekunde der Schalldruck gemessen und gespeichert, für Signale die nicht allzuweit oberhalb von 20kHz abgeschnitten werden, ist also eine perfekte Rekonstruktion möglich.

Auch in der Computergraphik spielt der Satz von NYQUIST eine wichtige Rolle, denn Pixelgraphik ist schließlich nichts anderes als die (zweidimensionale) diskrete Abtastung eines kontinuierlichen Bilds. Falls das Bild zu hochfrequente Anteile enthält, entstehen sogenannte *alias-Effekte*, da das Auge diese Anteile anhand des Pixelbilds als niedrigerfrequente Strukturen mit gleichen Abtastwerten interpretiert. Vor der Abtastung muß das Bild daher tiefpaßgefiltert werden; da die Funktion  $\frac{\sin ax}{ax}$ , die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses, einigermäßen schnell abfällt, wendet man dazu meist das Lemma aus dem letzten Abschnitt an und faltet mit einer geeigneten solchen Funktion. Falls das Ursprungsbild auch schon als (höher aufgelöste) Pixelgraphik gegeben war, wird die Faltung hier einfach zu einer Summation über nicht garzu viele Nachbarpixel, was sehr effizient durchgeführt werden kann.

**§9: Ausblick: Mehrdimensionale Fourier-Theorie**

**a) Faltungen und Fourier-Integrale**

In völliger Analogie zum eindimensionalen Faltungsintegral läßt sich auch ein  $n$ -dimensionales definieren: Für zwei Funktionen  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die Faltung als

$$f \star g = \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) g(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$$

– sofern dieses Integral existiert.

Auch die anschauliche Interpretation ist dieselbe wie im eindimensionalen Fall: Wenn wir  $f$  als eine Gewichtsfunktion auffassen, ist  $f \star g$

ein gewichtetes Mittel über Werte von  $g$ ; für

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\pi^n / 2 \cdot \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n x_k^2}$$

etwa, die  $n$ -dimensionale GAUSS-Funktion, entspricht das im Fall  $n = 2$  einem je nach Größe von  $\sigma$  mehr oder weniger defokussierten Bild.

Durch mehrdimensionale Faltungen mit  $\delta$ -Distributionen lassen sich Verschiebungen realisieren: Beispielsweise wäre, wenn der Satz von FUBINI in einer solchen Situation anwendbar wäre,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \delta(x - a) \delta(y - b) f(x, y) dx dy = f(x - a, y - b),$$

und genau so *definieren* wir die Interpretation der *a priori* sinnlosen linken Seite.

(Man beachte, daß Ausdrücke wie  $\delta(x - a)\delta(x - b)$  oder  $\delta(x)^2$  weiterhin sinnlos bleiben, egal ob sie unter einem oder mehreren Integralzeichen stehen.)

Ist also  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die (z.B. durch Grauwerte) ein Bild definiert und die außerhalb des Bereichs  $0 \leq x, y \leq 1$  verschwindet, so ist mit der Distribution

$$\eta(x, y) = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^M \delta(x - k) \delta(y - \ell)$$

die Faltung  $\eta \star f$  ein Bilderbogen aus  $NM$  Exemplaren dieses Bildes. Abbildung 27 zeigt dies für den Graph einer zweidimensionalen Normalverteilung.

Auch die FOURIER-Transformation läßt sich in völliger Analogie zum eindimensionalen Fall auf beliebige Dimensionen verallgemeinern: Für  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir

$$\hat{f}: \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \\ (\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i \sum_{k=1}^n \omega_k x_k} dx_1 \dots dx_n \end{cases}$$

Da es nur eine Zeit gibt, läßt sich dies nicht als Zerlegung eines zeitlichen Signals in seine Frequenzen interpretieren; die  $x_i$  sollte man sich hier

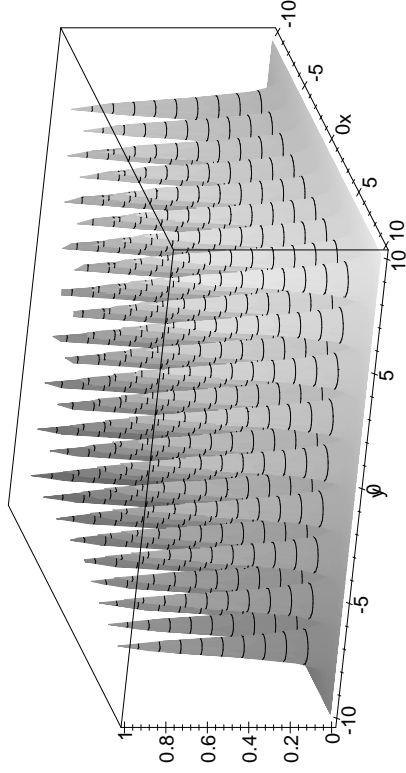


Abb. 27: Eine zweidimensionale Faltung

als *räumliche* Koordinaten vorstellen. Beispiele dazu folgen im nächsten Abschnitt, wo wir eine Anwendung solcher räumlicher FOURIER-Transformationen betrachten.

Wenigsten kurz sei noch angedeutet, wie man auch die mehrdimensionale FOURIER-Theorie über stark abfallende Funktionen mehrerer Veränderlicher exakt begründen kann:

Eine Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *stark abfallend*, wenn *alle* Ausdrücke der Form

$$x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} \frac{\partial^{r_1+\dots+r_n}}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

auf ganz  $\mathbb{R}^n$  beschränkt sind. Der Vektorraum aller dieser Funktionen ist der SCHWARTZ-Raum  $S(\mathbb{R}^n)$ .

Für Funktionen aus diesem Raum ist wieder alles relativ problemlos; zur Verallgemeinerungen auf interessantere Funktionen führt auch hier der Umweg über Distributionen  $T: S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ , die in der naheliegenden Weise als Verallgemeinerungen eindimensionaler Distributionen definiert werden. Beispielsweise kann man dem gerade *ad hoc* betrachteten

Produkt  $\delta(x - a)\delta(y - b)$  über die Distribution

$$\Delta_{a,b}: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \mapsto \varphi(a, b) \end{cases}$$

einen präzisen Sinn geben – solange es in einem sinnvollen Kontext unter zwei Integralzeichen steht.

**b) Fraunhofer-Beugung**

Wenn Licht auf Strukturen trifft, in Vergleich zu deren Größe seine Wellenlänge nicht mehr vernachlässigbar klein ist, lassen sich die Gesetze der geometrischen Optik bekanntlich nicht mehr anwenden; man beobachtet dann Beugungsphänomene.

Beugung ist ein sehr komplexes Gebiet; für ein Beispiel im Rahmen einer Vorlesung über Höhere Mathematik müssen wir uns auf den allereinfachsten Fall beschränken. Wir gehen daher aus von einem Lichtstrahl, der aus sehr großer Entfernung kommt oder der zumindest (z.B. dank einer Linse, aus deren Brennpunkt er kommt) so aussieht, und beobachten auch die Beugungsfigur in großer Entfernung. Diese Situation bezeichnet man als FRAUNHOFER-Beugung.



JOSEPH VON FRAUNHOFER (1787–1826) wurde in Straubing als elftes und letztes Kind eines Glasmeisters geboren; er machte auch selbst eine Lehre als Glasmachereifer und Spiegelmacher. Daneben besuchte er die Feierabendschule, wo er zumindest primitive Grundkenntnisse im Rechnen erwarb. 1806 kam er an das optische Institut von UTZSCHNEIDER, der ihm Bücher über Optik und Mathematik besorgte. FRAUNHOFER entwickelte Präzisionsmaschinen zur Fertigung optischer Instrumente von bis dahin nicht gekannter Qualität und erfand auch das optische Gitter. Durch seine Versuche zur Lichtbeugung bewies er die Wellennatur des Lichts. 1824 wurde er zum Professor ernannt; er berichtete unter anderem in öffentlichen Sonntagsvorlesungen über seine Arbeit. Im gleichen Jahr wurde er vom bayrischen König LUDWIG I. in den Adelsstand erhoben. Zwei Jahre später starb er an Tuberkulose.

Zur mathematischen Behandlung der optischen Beugung brauchen wir zunächst ein physikalisches Modell für Lichtwellen. Für eine physikalisch korrekte Beschreibung müssen wir Licht als zeitlich veränderliches

elektromagnetisches Feld betrachten, d.h. wir brauchen zwei räumlich und zeitlich variable Vektorfelder  $\vec{E}(x, y, z; t)$  und  $\vec{B}(x, y, z; t)$ , die den MAXWELLSchen Gleichungen genügen. Glücklicherweise muß man in der Optik aber nur selten so weit gehen: Zwar hängt die Beugung an einem Spalt theoretisch durchaus von der Leitfähigkeit des verwendeten Materials ab, aber diese Abhängigkeit ist so gering, daß man sie für alle praktischen Zwecke vernachlässigen kann.

Man arbeitet daher in der Wellenoptik gerne mit einer sogenannten *skalaren Welle*, über deren physikalische Bedeutung man sich keine sonderlichen Gedanken macht. Aus rechnerischen Gründen betrachtet man sie als komplexwertige Funktion; falls man sich unbedingt etwas darunter vorstellen will, kann man beispielsweise den Realteil dieser Funktion als die  $x$ -Komponente des elektrischen Felds interpretieren, muß dann aber beachten, daß eine skalare Welle im Gegensatz zu einem elektrischen Feld *keine* Wechselwirkung mit Materie egal welcher Leitfähigkeit zeigt – das ist eine der Idealisierungen hinter dem Konzept der skalaren Welle. Wichtig für uns ist nur, daß die Intensität der Welle (also z.B. die Intensität der Beugungslinien, die wir auf einem Schirm beobachten) gleich dem Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll.

Eine Welle hat eine räumliche wie auch zeitliche Periodizität. Zeitlich periodische Vorgänge kennen wir bereits: Das sind Schwingungen, die mathematisch durch Funktionen der Art

$$f(t) = A_0 e^{i\omega t} \quad \text{oder etwas allgemeiner} \quad f(t) = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

beschrieben werden, wobei die Phasenverschiebung  $\varphi$  dafür sorgt, daß wir auch Schwingungen behandeln können, die ihre maximale Auslenkung nicht zur Zeit  $t = 0$  erreichen. Wir wollen dies jedoch im folgenden ignorieren und mit der einfacheren ersten Funktion arbeiten.

Für räumlich periodische Vorgänge haben wir entsprechend zur Periode  $T$  einer Schwingung eine Wellenlänge  $\lambda$ ; das Analogon zur Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi/T$  bezeichnen wir als

$$\text{Wellenzahl} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Ein eindimensionaler periodischer Vorgang kann somit beschrieben werden durch eine Funktion  $g(x) = A_0 e^{ikx}$ .

Im Mehrdimensionalen müssen wir die Wellenzahl  $k$  ersetzen durch einen Vektor  $\vec{k}$  der Länge  $k$ , den *Wellenzahlvektor*; und betrachten die Funktion

$$g(\mathbf{x}) = A_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}.$$

(Die Wellenlänge betrachten wir weiterhin nur als Skalar.)

Eine Welle soll zeitlich *und* räumlich periodisch sein; dies leistet die Funktion

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

oder natürlich auch die entsprechende Funktion mit einem Pluszeichen im Exponenten. Der Grund, warum wir das Minuszeichen bevorzugen, ist folgender:

Im eindimensionalen Fall ist

$$\psi(x, t) A_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = A_0 e^{ik \left( \frac{\omega}{k} t - x \right)},$$

$\psi(x, t)$  hängt also nur ab von  $x - \frac{\omega}{k} t$ . Dies können wir auch so interpretieren, daß

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda \omega}{2\pi}$$

die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist; denn eine Änderung der Zeit um  $\Delta t$  hat denselben Effekt wie eine Änderung des Orts um  $v \cdot \Delta t$ .

Im Falle mehrerer räumlicher Dimensionen ist alles grundsätzlich genauso, nur die Schreibweise ist etwas komplizierter: Ist  $\vec{k}_0$  ein Einheitsvektor in Richtung von  $\vec{k}$ , d.h.  $\vec{k} = k \cdot \vec{k}_0$ , so ist

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A_0 e^{ik \left( \frac{\omega}{k} t - \vec{k}_0 \cdot \vec{x} \right)};$$

dabei ist  $\vec{k}_0 \cdot \vec{x}$  die  $\vec{x}$ -Komponente in Richtung von  $\vec{k}$ . Damit ist  $\vec{k}_0$  die *Richtung* des Geschwindigkeitsvektors; der Wellenzahlvektor zeigt also in Richtung der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, und der Betrag  $v$  des Geschwindigkeitsvektors ist durch obige Formel gegeben.

Die Annahme einer konstanten Amplitude  $A_0$  in obigen Formeln ist nur in seltenen Fällen realistisch: Licht kommt meist aus einer (zumindest in erster Näherung) punktförmigen Lichtquelle, und seine Intensität nimmt



mit dem Quadrat der Entfernung ab. Da die Intensität das Betragsquadrat der Wellenfunktion sein soll, müssen wir eine solche Kugelwelle also in der Form

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{A_0}{|\vec{x}|} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

ansetzen, sofern die Lichtquelle im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt.

Im Falle einer weit entfernten Lichtquelle, wie wir sie bei der FRAUNHOFER-Biegung annehmen und auch von der Sonne her kennen, spielt allerdings die Ortsabhängigkeit der Amplitude praktisch keine Rolle, so daß wir keinen nennenswerten Fehler machen, wenn wir sie als konstant annehmen. In diesem Fall sprechen wir von einer *ebenen* Welle.

Ausgangspunkt für die Berechnung von Beugungsbildern ist das HUYGENSSCHE Prinzip: Jeder Punkt des Hindernisses ist Quelle einer Kugelwelle, deren Amplitude gleich der Amplitude der einfallenden Welle mal der Durchlässigkeitsfunktion  $\alpha$  des Hindernisses im betrachteten Punkt ist. Letztere gibt an, welcher Teil des Lichts durchgelassen wird; sie ist also eins an den Stellen, an denen alles Licht durchkommt, und null dort, wo nichts durchkommt. An Stellen, an denen ein Teil des Lichts durchgelassen wird, kann sie auch Zwischenwerte annehmen.



CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695) kam aus einer niederländischen Diplomatenfamilie. Dadurch und später auch durch seine Arbeit hatte er Kontakte zu führenden europäischen Wissenschaftlern wie DESCARTES und PASCAL. Nach seinem Studium der Mathematik und Juris arbeitete er teilweise auch selbst als Diplomat, interessierte sich aber bald vor allem für Astronomie und den Bau der dazu notwendigen Instrumente. Er entwickelte eine neue Methode zum Schleifen von Linsen und erhielt ein Patent für die erste Pendeluhr. Trotz des französischen-niederländischen Kriegs arbeitete er einen großen Teil seines Lebens an der *Académie Royale des Sciences* in Paris, wo beispielsweise LEIBNIZ viel Mathematik bei ihm lernte. HUYGENS war ein scharfer Kritiker sowohl von NEWTONS Theorie des Lichts als auch seiner Gravitationstheorie, die er für absurd und nutzlos hielt. Gegen Ende seines Lebens beschäftigte er sich mit der Möglichkeit außerirdischen Lebens.

Bei der FRAUNHOFER-Biegung betrachten wir auch die gebeugten Wellen nur aus sehr großer Entfernung und können daher statt von Kugelwellen von ebenen Wellen ausgehen. Außerdem können wir die Zeitabhängigkeit der Welle ignorieren, denn die Frequenzen, mit denen das sichtbare Licht schwingt, liegen um Größenordnungen jenseits sowohl unserer Reaktionszeit als auch der unserer Meßinstrumente, so daß wir nur die Amplituden messen können. Schreiben wir die einfallende Welle als

$$\psi(\mathbf{x}, t) = A_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \cdot e^{i\omega t},$$

ist also der zweite Faktor eine zeitabhängige Phasenvariation, die wir bei der Berechnung des räumlichen Intensitätsverteilung des Beugungsbilds ignorieren können; es reicht also, den Faktor  $A_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}$  zu betrachten.

Eine weitere Konsequenz des (auch im Vergleich zur Größe des Hindernisses) weit entfernten Betrachtungspunkts ist, daß wir das Hindernis vom Schirm aus praktisch nur als Punkt sehen; was an einer gegebenen Stelle des Schirms ankommt, hängt also im wesentlichen nur ab vom Winkel  $\theta$  oder (im Zweidimensionalen) den Winkeln  $\theta$  und  $\varphi$ , unter dem (oder denen) die Strahlen von diesem „Punkt“ ausgehen.

Um die Intensität des Beugungsbilds in einem gegebenen Punkt zu berechnen, müssen wir also alle vom Hindernis in einem festen Winkel ausgehenden Strahlen aufsummieren, und *hierbei* müssen wir auch die Phasen berücksichtigen, da diese Strahlen miteinander interferieren. Abbildung 28 zeigt, wie sich die Laufwege zweier benachbarter Strahlen unterscheiden, und diese Differenzen können wir nicht vernachlässigen, da sie in der Größenordnung des Hindernisses und damit auch der Wellenlänge des Lichts liegen.

Betrachten wir zunächst den (in Abbildung 28 dargestellten) eindimensionalen Fall. Verglichen mit dem Strahl, der von einem (irgendwie gewählten) Nullpunkt des Hindernisses ausgeht, hat der Strahl mit Ausgangspunkt in Entfernung  $x$  einen Laufwegunterschied von  $x \sin \theta$ ; dies entspricht einem Phasenfaktor von  $e^{-ikx \sin \theta}$ . Wählen wir also die Phase im Nullpunkt als Referenz (die wir in den zu ignorierenden Phasenfaktor der einfallenden Welle hineinziehen können), ist die Summe aller unter

Die Größen  $u$  und  $v$  lassen sich zwar als Strecken interpretieren, sind aber *nicht* proportional zu den Strecken, die man auf einem ebenen Schirm messen kann: Deren Längen sind proportional zu  $\tan \theta$  und  $\tan \varphi$ . Für kleine Winkel, auf die man sich bei der FRAUNHOFER-Beugung wegen des großen Abstands zum Schirm notwendigerweise beschränken muß, unterscheiden sich allerdings Sinus, Tangens und Bogenmaß nur wenig, so daß man auch ohne Umrechnung ein gutes Bild des Beugungsmusters erhält.

Als erstes Beispiel wollen wir das Beugungsbild eines eindimensionalen Spalts berechnen. Dieser habe die Breite  $a$ ; seine Durchlässigkeitsfunktion kann also beispielsweise geschrieben werden als

$$\alpha: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)e^{-iux} dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{ia}{2}u} - e^{\frac{ia}{2}u}}{-iu} = \frac{2 \sin \frac{au}{2}}{u} = a \frac{\sin \frac{au}{2}}{\frac{au}{2}} = a \operatorname{sinc} \frac{au}{2}. \end{aligned}$$

Dies erklärt, warum die Funktion  $\operatorname{sinc} x$  auch als *Spaltfunktion* bezeichnet wird.

Die Lichtintensitäten, die man im Beugungsbild beobachtet, sind allerdings *nicht* durch diese Funktion gegeben:  $\widehat{\alpha}(u)$  ist die Amplitude einer skalaren Welle; die Intensität ist gleich dem Betragsquadrat davon, bei einer reellen Funktion wie hier also einfach das Quadrat

$$\widehat{\alpha}(u)^2 = 4 \frac{\sin^2 \frac{au}{2}}{u^2} = a^2 \operatorname{sinc}^2 \frac{au}{2}.$$

Als nächstes Beispiel betrachten wir Beugung an einem regelmäßigem Strichgitter. Der Abstand zweier Striche sei  $d$  und es gebe insgesamt  $2N + 1$  Striche. Wenn wir in erster Näherung die Breite der Striche

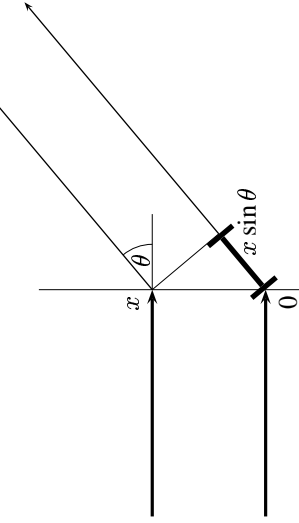


Abb. 28: Laufwegunterschied zweier paralleler Strahlen

dem Winkel  $\theta$  abgehenden Strahlen gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)e^{-ikx \sin \theta} dx;$$

das ist gleich der FOURIER-Transformierten von  $\alpha(x)$ , ausgewertet im Punkt  $u = k \sin \theta$ .

Bei einem zweidimensionalen Hindernis müssen entsprechend zwei Winkelvariablen  $\theta$  und  $\phi$  berücksichtigt werden, und auch die Durchlässigkeitsfunktion  $\alpha$  hängt von zwei Variablen  $x, y$  ab; außerdem müssen wir nun vom Wellenzahlvektor sowohl die  $x$ - als auch die  $y$ -Komponente berücksichtigen. Wir erhalten daher als Summe aller Strahlen unter den beiden gegebenen Winkeln das Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x, y)e^{-i(k_1 x \sin \theta + k_2 y \sin \phi)} dx dy,$$

d.h. die zweidimensionale FOURIER-Transformierte von  $\alpha$ , ausgewertet im Punkt  $(u, v) = (k_1 \sin \theta, k_2 \sin \phi)$ .

Zur Vereinfachung der Schreibweise drückt man das Beugungsbild meist einfach in der Variablen  $u$  bzw. den Variablen  $u$  und  $v$  aus statt in den Winkelvariablen; dann ist das Beugungsbild eines Hindernisses mit Durchlässigkeitsfunktion  $\alpha$  einfach die FOURIER-Transformierte von  $\alpha$ .

vernachlässigen, können wir die Durchlässigkeitsfunktion  $\alpha$  als Summe von  $\delta$ -Distributionen schreiben:

$$\alpha(t) = \sum_{k=-N}^N \delta(x - kd).$$

Das Beugungsbild ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)e^{-iux} dx = \sum_{k=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - kd)e^{-iux} dx \\ &= \sum_{k=-N}^N e^{-iudk} = \sum_{k=-N}^N e^{iukd} = e^{-iuNd} \sum_{k=0}^{2N} e^{iukd} \\ &= \frac{e^{-iuNd} (1 - e^{i2N+1}d)}{1 - e^{iud}} = \frac{1 - e^{iud}}{1 - e^{iud}} \\ &= \frac{e^{iu(N+\frac{1}{2})d} - e^{-iu(N+\frac{1}{2})d}}{e^{iu\frac{d}{2}} - e^{-iu\frac{d}{2}}} = \frac{\sin u(N + \frac{1}{2})d}{\sin \frac{ud}{2}}. \end{aligned}$$

Abbildung 29 zeigt diese Funktion; man sieht ihr das charakteristische Linienmuster an, das man bei der Beugung am Gitter beobachtet.

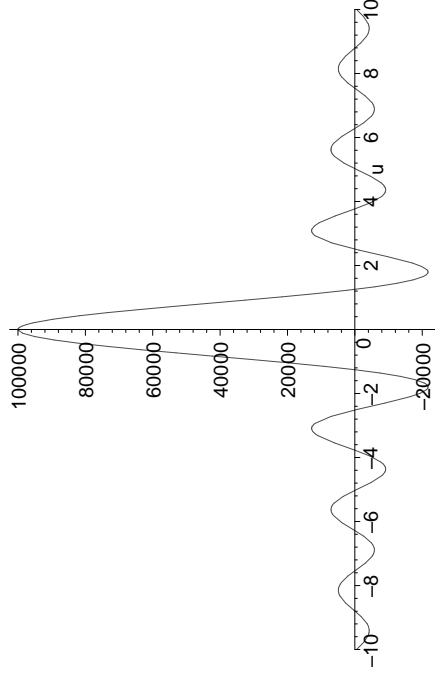


Abb. 29: Beugung am Gitter

Trotzdem wird vielleicht einigen Lesern unwohl sein beim Gedanken an eine Summe von  $\delta$ -Distributionen als Durchlässigkeitsfunktion. Deshalb wollen wir zur Sicherheit nachrechnen, was sich ändert, wenn wir stattdessen die Striche als Spalte der Breite  $a$  annehmen.

Für einen einzelnen solchen Spalt haben wir dann die oben betrachtete Durchlässigkeitsfunktion

$$\alpha_a: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

eines Spalts der Breite  $a$ , und die Durchlässigkeitsfunktion des gesamten Strichgitters ist die Faltung  $\alpha \star \alpha_a$  dieser Funktion mit der oben betrachteten Funktion  $\alpha$ . Das Beugungsbild ist somit gegeben durch das Produkt der gerade berechneten Beugungsbilds mit dem Beugungsbild eines Spalts, also durch

$$\frac{\sin u(N + \frac{1}{2})d}{\sin \frac{ud}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{au}{2}}{\frac{u}{2}}.$$

Da der Abstand zwischen zwei Spaltmitten gleich  $d$  ist, muß die Spaltbreite  $a$  echt kleiner als  $d$  sein, und die Anzahl  $N$  der Striche im Gitter liegt typischerweise bei mindestens einigen Zehntausend. Somit hat der Sinus im zweiten Term eine Kreisfrequenz, die um einen mindestens fünfstelligen Faktor größer ist als die im ersten; der zweite Term zeigt also erst dann eine nennenswerte Variation, wenn wir im ersten Faktor mehrere Tausend Linien betrachten. In dem Bereich, den wir realistischere Zwecke beobachten können, ist der zweite Term daher für alle praktischen Zwecke konstant. Der Betrag dieser Konstanten ist irrelevant, denn da wir bei der FRAUNHOFER-Beugung das Beugungsbild in „sehr großer“ Entfernung vom Gitter betrachten, können wir sinnvollerweise ohnehin nur von relativen, nicht aber von absoluten Helligkeiten reden.

Als letztes Beispiel zur eindimensionalen Beugung möchte ich eines betrachten, bei dem das Licht nicht als konstante Wellenfront einfällt: Je nach Wahl der Randbedingungen im optischen Resonator entsteht nicht immer ein Strahl, der näherungsweise als ebene Welle betrachtet werden kann (die sogenannte TEM<sub>00</sub>-Mode); bringt man Hindernisse in

den Strahlengang, können auch höhere TEM-Moden angeregt werden (TEM = *transversal elektromagnetisch*). Bei einem dünnen Hindernis wie etwa einem Haar genau in der Mitte des Strahls beispielsweise entsteht die TEM<sub>01</sub>-Mode, die aus einem linken und einem rechten Halbschritt besteht, deren Phasen sich um 180° unterscheiden, und die man ansonsten wieder näherungsweise als ebene Wellen betrachten kann. Trifft ein solcher Strahl auf einen Spalt, dessen Mitte mit der Grenze zwischen den beiden Halbstrahlen zusammenfällt, ist also in der linken Hälfte des Spalts die Phase um 180° gegenüber der rechten verschoben; dies können wir formal dadurch beschreiben, daß wir die Durchlässigkeitsfunktion des Spalts multiplizieren mit einer Funktion, die in der linken Hälfte +1 und in der rechten gleich -1 ist. Für einen Spalt der Breite  $a$  erhalten wir als Beugungsbild

$$\int_{-\frac{a}{2}}^0 e^{-iux} dx + \int_0^{\frac{a}{2}} -e^{-iux} dx = \frac{1 - e^{iua/2} - e^{-iua/2} + 1}{-iu} \\ = \frac{2i}{u} \left(1 - \cos \frac{ua}{2}\right).$$

Alternativ läßt sich dies auch über die Beziehung

$$e^{iua/2} + e^{-iua/2} - 2 = (e^{iua/4} - e^{-iua/4})^2 = -4 \sin^2 \frac{ua}{4}$$

als

$$\frac{4i}{u} \sin^2 \frac{ua}{4}$$

schreiben. Daß hier imaginäre Größen auftreten, braucht uns natürlich nicht zu stören: Die beobachteten Intensitäten sind bekanntlich die Beugungsquadrate der hier berechneten Funktionen, also reell und positiv.

Zum Abschluß möchte ich noch zumindest ein Beispiel eines zweidimensionalen Beugungsbilds betrachten. Leider sind die zugehörigen FOURIER-Integrale schon in so einfachen Fällen wie dem einer scheibenförmigen Blende nicht mehr elementar auswertbar; wir beschränken uns daher auf den extrem einfachen Fall einer rechteckigen Blende. Deren

Durchlässigkeitsfunktion ist

$$\alpha: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \text{ und } -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

die Beugungsfigur ist also gegeben durch

$$\hat{\alpha}(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} \alpha(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy = \iint_{\substack{-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}}} e^{-i(ux+vy)} dx dy \\ = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-iux} e^{-ivy} dx dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} \left( \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ivy} dy \right) dx \\ = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-iux} \cdot \frac{\sin \frac{bv}{2}}{v} dx = 4 \cdot \frac{\sin \frac{au}{2}}{u} \cdot \frac{\sin \frac{bv}{2}}{v},$$

da wir das Rechteck als Normalbereich betrachten können und somit das zweidimensionale Integral über zwei eindimensionale Integrationen berechnen können.

Als Beugungsfigur erhalten wir, nicht gerade überraschenderweise, das Produkt einer vertikalen und einer horizontalen Beugungsfigur eines eindimensionalen Spalts.