

h) Harmonische Analyse als lineare Abbildung

Die BESSELSche Ungleichung zeigt, daß nicht alle Folgen reeller oder komplexer Zahlen als FOURIER-Koeffizienten eine stückweise stetigen Funktion auftreten können: Zumindest muß die Summe ihrer Betragsquadrate konvergieren, d.h. die $c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $c(k) = c_k$, die jedem $k \in \mathbb{Z}$ den FOURIER-Koeffizienten c_k zuordnet, liegt im Vektorraum

$$\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Um den Zusammenhang zwischen Funktionen und Koeffizientenfolgen besser zu verstehen, definieren wir für $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Funktion

$$\hat{f}: \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ k \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k \cdot i \omega t} dt \end{cases};$$

$\hat{f}(k)$ ist also gerade der k -te FOURIER-Koeffizient von f .

Lemma: Die Zuordnung $f \mapsto \hat{f}$ definiert eine lineare Abbildung von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ nach $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Der *Beweis* ist trivial wegen der Linearität der Integration. ■

Als nächstes definieren wir auf $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ein HERMITESches Skalarprodukt durch die Vorschrift

$$(c, d) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}.$$

Wir müssen zeigen, daß dies erstens wohldefiniert ist, daß die Summe also überhaupt konvergiert, und daß es zweitens alle Forderungen an ein HERMITESches Skalarprodukt erfüllt.

Da für zwei komplexe Zahlen z und w ist $(|z| - |w|)^2 \geq 0$, also

$$|zw| = |z\overline{w}| \leq \frac{1}{2} (|z|^2 + |w|^2).$$

Für zwei Funktionen $c, d \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ist daher für jede natürliche Zahl N

$$\left| \sum_{k=-N}^N c(k) \overline{d(k)} \right| \leq \sum_{k=-N}^N |c(k) \overline{d(k)}| \\ \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-N}^N |c(k)|^2 + \sum_{k=-N}^N |d(k)|^2 \right).$$

Nach Definition von $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ konvergiert die rechte Seite für $N \rightarrow \infty$, also auch die linke.

Das Nachrechnen der Forderungen an ein HERMITESches Skalarprodukt ist nun einfach: Abgesehen von der Tatsache, daß die Summen nicht mehr endlich sind, geht alles ganz genauso wie beim HERMITESchen Standardskalarprodukt auf \mathbb{C}^n .

Mit diesem Skalarprodukt ausgedrückt bekommt die BESSELSche Ungleichung die kompakte Form

$$(\hat{f}, \hat{f}) \leq (f, f) \quad \text{für alle } f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

§4: Periodische Faltungen

Abgesehen von den beiden Beispielen der Rechteckschwingung und des Sägezahns wissen wir bislang noch von keiner FOURIER-Reihe, ob und gegebenenfalls wohin sie konvergiert. In diesem Paragraphen soll dies zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen geklärt werden. Als zentral wird sich dabei eine neue Konstruktion herausstellen, die *Faltung zweier Funktionen*.

a) Faltungen

Definition: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bezeichnen wir die Funktion

$$f \star g(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

als (periodische) Faltung von f und g .

Anschaulich kann man sich die Faltung als eine Art Mittelung von f vorstellen mit einer Gewichtsfunktion g . Im zweidimensionalen (nicht-periodischen) Analogon kann man beispielsweise ein optisch defokussiertes Bild so beschreiben: Bei einer perfekten optischen Abbildung einer Ebene hängt jeder Bildpunkt von genau einem Punkt der Ebenen ab; ist das System aber defokussiert, so kommen auch noch Einflüsse der Nachbarpunkte dazu, die umso größer sind, je näher die Punkte beieinanderliegen. Eine Helligkeitsverteilung $f(s, t)$ wird dann abgebildet auf

$$F(s, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{(s-\sigma)^2+(t-\tau)^2/2a} f(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

wobei der Parameter a umso größer ist, je stärker das Bild defokussiert ist. Für kleines a ist der Effekt also eher ein Weichzeichnen als eine echte Unschärfe, und dieser Glättungseffekt ist ein allgemeines Charakteristikum von Faltungen:

Lemma: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g$ eine stetige Funktion.

(Man beachte, daß f und g beide nur als stückweise stetig vorausgesetzt sind!)

Beweis: Als stückweise stetige periodische Funktion ist g insbesondere beschränkt: Für jedes offene Intervall (t_j, t_{j+1}) , in dem f stetig ist, müssen nach Definition der stückweisen Stetigkeit der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{t \rightarrow t_j^+} g(t)$ und der linksseitige Grenzwert $\lim_{t \rightarrow t_{j+1}^-} g(t)$ existieren; damit kann die Einschränkung von g auf das offene Intervall (t_j, t_{j+1}) fortgesetzt werden zu einer stetigen Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[t_j, t_{j+1}]$ (die an den Intervallenden natürlich nicht mit g übereinstimmen muß). Damit hat der Betrag dieser Funktion ein endliches Maximum M_j , das auch eine Schranke für g im offenen Intervall (t_j, t_{j+1}) ist. Nimmt man nun als M das Maximum aller M_j sowie auch der Beträge $|g(t_j)|$ der Funktionswerte an den potentiellen Sprungstellen, so ist $|g(t)| \leq M$ für alle $t \in [0, T]$ und damit auch für alle $t \in \mathbb{R}$.

Seien nun t_1 und t_2 Punkte aus \mathbb{R} ; dann ist

$$\begin{aligned} |f \star g(t_1) - f \star g(t_2)| &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t_1 - \tau) - f(t_2 - \tau)| |g(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{M}{T} \int_0^T |f(t_1 - \tau) - f(t_2 - \tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Das noch verbliebene Integral mißt die Fläche zwischen den Graphen von $f(t)$ und $f(t+t_2-t_1)$ über eine Periode von f ; wegen der stückweisen Stetigkeit von f geht diese gegen null für $t_2 \rightarrow t_1$. ■

b) Die Fourier-Reihe einer Faltung

Die Nützlichkeit von Faltungen für FOURIER-Reihen ergibt sich aus folgender Formel:

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$\widehat{f \star g}(k) = \widehat{f}(k) \cdot \widehat{g}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z};$$

die komplexen FOURIER-Koeffizienten von $f \star g$ sind also gerade die Produkte der komplexen FOURIER-Koeffizienten von f und von g .

Der *Beweis* erfolgt durch Nachrechnen: Der k -te FOURIER-Koeffizient

c_k von $f \star g$ ist

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f \star g(t) e^{-k \cdot i \omega t} dt = \frac{1}{T^2} \int_0^T \left(\int_0^T f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) e^{-k \cdot i \omega t} dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq \tau \leq T}} f(t-\tau) g(\tau) e^{-k \cdot i \omega t} d\tau dt \\ &= \frac{1}{T^2} \iint_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq \tau \leq T}} f(t-\tau) e^{-k \cdot i \omega(t-\tau)} \cdot g(\tau) e^{-k \cdot i \omega \tau} dt d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau) e^{-k \cdot i \omega(t-\tau)} dt \right) g(\tau) e^{-k \cdot i \omega \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Klammer kann mit Hilfe der Substitution $u = t - \tau$ im Integral berechnet werden:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t-\tau) e^{-k \cdot i \omega(t-\tau)} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau}^{T-\tau} f(u) e^{-k \cdot i \omega u} du = \hat{f}(k),$$

denn wie wir uns schon überlegt haben, kommt es bei einer periodischen Funktion nicht darauf an, über welches Intervall der Länge T wir integrieren. Somit ist

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{f}(k) \cdot g(\tau) e^{-k \cdot i \omega \tau} d\tau = \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k),$$

wie behauptet. ■

Sind $S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i \omega t}$ und $S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k \cdot i \omega t}$ die FOURIER-Reihen von f und g , ist die FOURIER-Reihe von $f \star g$ somit

$$S_{f \star g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{k \cdot i \omega t}.$$

Nach der BESSELschen Ungleichung konvergieren die Summen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k|^2;$$

außerdem ist für jedes k

$$|c_k d_k| \leq \frac{1}{2} (|c_k|^2 + |d_k|^2);$$

also konvergiert auch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k d_k e^{k \cdot i \omega t}|.$$

(Man beachte, daß $|e^{k \cdot i \omega t}| = 1$ ist für jede reelle Zahl t .) Damit haben wir gezeigt, daß die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Das hat eine wichtige Konsequenz:

Lemma: Konvergiert die FOURIER-Reihe einer Funktion h gleichmäßig gegen eine Funktion S_h , so ist S_h stetig und hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie h .

Beweis: Die FOURIER-Reihe von h sei

$$S_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i \omega t}.$$

Da alle Summanden $c_k e^{k \cdot i \omega t}$ stetige Funktionen sind, ist wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auch die Summe eine stetige Funktion; deren k -ter FOURIER-Koeffizient ist

$$\widehat{S_h}(k) = (S_h, e^{k \cdot i \omega t}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=-N}^N c_\ell (e^{\ell \cdot i \omega t}, e^{k \cdot i \omega t}) = c_k,$$

wie behauptet. ■

Insgesamt haben wir damit bewiesen

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion. Diese hat dieselben FOURIER-Koeffizienten wie $f \star g$. ■

Damit wissen wir zwar immer noch nicht, *wohin* die FOURIER-Reihe von $f \star g$ konvergiert, aber wir wissen immerhin, *daß* sie für Funktionen, die als Faltungen darstellbar sind, konvergiert, und wir wissen auch, daß für die Differenz zwischen Ausgangs- und Grenzfunktion sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden. Wir müssen daher einerseits Funktionen mit verschwindenden FOURIER-Koeffizienten genauer untersuchen und andererseits versuchen, eine möglichst große Klasse von Funktionen als Faltungen darzustellen, auf die wir den gerade bewiesenen Satz anwenden können.

c) Faltung mit einem Sägezahn

Als erstes konkretes Beispiel (von dem sich zeigen wird, daß es zumindest einen Teil der zweiten Aufgabe lösen wird) betrachten wir für eine beliebige Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Faltung mit dem Sägezahn

$$s(t) = \frac{T}{2} - t \quad \text{für } 0 < t < T \quad \text{und} \quad s(0) = 0,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T ; es handelt sich hier um das Zweifache der in §2c) betrachteten Funktion.

Für $t, \tau \in [0, T)$ liegt $t - \tau$ genau dann wieder in $[0, T)$, wenn $\tau \leq t$ ist; andernfalls liegt $t - \tau$ im Intervall $(-T, 0)$, wo

$$s(t) = s(t + T) = \frac{T}{2} - (t + T) = -\frac{T}{2} - t$$

ist. Somit ist für $t, \tau \in (0, T)$

$$s(t - \tau) = \begin{cases} \frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau < t \\ 0 & \text{für } \tau = t \\ -\frac{T}{2} - t + \tau & \text{für } \tau > t \end{cases}$$

und $s \star f(t)$ ist gleich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T s(t - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_0^t \left(\frac{T}{2} - (t - \tau) \right) f(\tau) d\tau + \frac{1}{T} \int_t^T \left(-\frac{T}{2} - (t - \tau) \right) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} \int_0^t f(\tau) d\tau - \frac{T}{2} \int_t^T f(\tau) d\tau + \int_0^t (\tau - t) f(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau - \int_t^T f(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{T} \int_0^t (\tau - t) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ist $F(t)$ eine Stammfunktion von $f(t)$, so ist der erste Summand gleich

$$\frac{1}{2} (F(t) - F(0) - F(T) + F(t)) = F(t) - \frac{F(0) + F(T)}{2}.$$

Auch das letzte Integral läßt sich durch partielle Integration weiter ausrechnen zu

$$\begin{aligned} \int_0^T (\tau - t) f(\tau) d\tau &= (\tau - t) F(\tau) \Big|_0^T - \int_0^T F(\tau) d\tau \\ &= (T - t) F(T) + t F(0) - \int_0^T F(\tau) d\tau \\ &= t(F(0) - F(T)) + T F(T) - \int_0^T F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also

$$s \star f(t) = F(t) + \frac{t}{T} (F(0) - F(T)) - \frac{F(0) + F(T)}{2} + F(T) - \frac{1}{T} \int_0^T F(\tau) d\tau.$$

Abgesehen von dem Term $\frac{t}{T}(F(0) - F(T))$ ist das eine Stammfunktion von $f(t)$, denn die drei hinteren Terme sind Konstanten, die nicht von t abhängen. Ist also insbesondere $F(T) = F(0)$, so ist $s * f$ eine Stammfunktion von f . Dies wollen wir ausnutzen, um differenzierbare Funktionen sowie eine leichte Verallgemeinerung davon als Faltungen auszudrücken und so die Konvergenz ihrer FOURIER-Reihen zu beweisen.

d) Fourier-Reihen stetiger stückweise differenzierbarer Funktionen

Definition: Eine stückweise stetige Funktion heißt stückweise differenzierbar, wenn es nur isolierte Punkte gibt, in denen f nicht stetig differenzierbar ist, und wenn auch in diesen Ausnahmepunkten sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert von $f(t)$ existieren.

Hier interessieren wir uns für periodische Funktionen; für diese bedeutet die Definition, daß es pro Periodenintervall höchstens endliche viele Punkte geben darf, in denen die Ableitung nicht definiert ist, aber auch dort muß sie einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert haben.

Einfache Beispiele stückweise differenzierbarer Funktionen sind die Rechteckschwingungen aus §2b), die überall außer in den Sprungstellen stetig differenzierbar sind und Ableitung null haben; in den Sprungstellen verschwindet daher auch sowohl der linksseitige als auch der rechtsseitige Grenzwert. Die Funktion ist aber trotzdem nicht differenzierbar in den Sprungstellen, da sie dort nicht einmal stetig ist. (Wäre f differenzierbar, so würde die Ableitung identisch verschwinden, die Funktion müßte also nach dem üblichen Argument über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung konstant sein.)

Genauso ist beim Sägezahn aus §2c) die Ableitung überall außer in den Sprungstellen gleich -1 ; in den Sprungstellen ist die Funktion nicht differenzierbar, aber beide Grenzwerte der Ableitung sind gleich -1 .

Weiteres Beispiel einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion ist etwa

$$f(t) = |t| \quad \text{für} \quad |t| \leq 1,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode zwei. Für alle $t \notin \mathbb{Z}$ ist f differenzierbar; falls die größte ganze Zahl kleiner t gerade ist, ist die Ableitung $+1$, ansonsten -1 . Bei einer geraden ganzen Zahl ist der linksseitige Grenzwert der Ableitung -1 und der rechtsseitige $+1$, bei einer ungeraden ist es umgekehrt.

Für eine stückweise differenzierbare Funktion können wir nicht wirklich von der abgeleiteten Funktion reden, da diese nicht in jedem Punkt existieren muß. Wir können aber eine Funktion $\varphi(t)$ definieren, die überall dort mit $f(t)$ übereinstimmt, wo $f(t)$ existiert; in den übrigen Punkten setzen wir $\varphi(t)$ auf irgendeinen beliebigen Wert, zum Beispiel auf null.

Die Funktion

$$\tilde{f}(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

ist stetig und stückweise differenzierbar, und sie hängt nicht ab vom Wert von φ in den Ausnahmepunkten; ihre Ableitung stimmt dort, wo sie definiert ist, mit φ überein. Falls f stetig ist, unterscheidet sich \tilde{f} daher nur um eine Konstante von f , und auch f ist eine Stammfunktion von φ .

Setzen wir nun noch zusätzlich voraus, daß $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ periodisch ist, folgt aus der Rechnung im vorigen Abschnitt, daß sich $f(t)$ nur um eine Konstante vom Faltungsprodukt $s * \varphi$ unterscheidet, denn

$$f(T) - f(0) = 0$$

für eine Funktion mit Periode T .

Aus Abschnitt b) wissen wir, daß die FOURIER-Reihe von $s * \varphi$ wie auch von jeder anderen Faltung absolut und gleichmäßig konvergiert; da die Addition einer Konstanten hieran nichts ändert folgt also zusammen mit den übrigen Resultaten aus Abschnitt b)

Satz: Ist $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stetig und stückweise differenzierbar, konvergiert die FOURIER-Reihe von f absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f , die dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie f . ■

e) Der Eindeutigkeitssatz

Auch wenn wir nun wissen, daß die FOURIER-Reihe zumindest für stetige stückweise differenzierbare Funktionen konvergiert, wissen wir noch nicht, wohin sie konvergiert. Diese Frage soll in diesem Abschnitt geklärt werden.

Beginnen wir mit dem einfachsten Fall einer Funktion, deren sämtliche FOURIER-Koeffizienten verschwinden, und die außerdem noch im Vektorraum $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt, d.h. in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ ist $f(t)$ der Mittelwert aus dem rechtsseitigen Grenzwert $f(t^+)$ und dem linksseitigen Grenzwert $f(t^-)$.

Satz: Sind für $f \in L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alle FOURIER-Koeffizienten null, ist auch $f(t) \equiv 0$.

Beweis: Auch hier arbeiten wir wieder mit einem Faltungsintegral, und zwar wollen wir versuchen, die Funktion f als Faltung von sich selbst mit einer geeigneten Funktion g auszudrücken; wir suchen also nach einer Funktion g , so daß $f \star g = f$ ist. Falls g diese Eigenschaft für beliebige Funktionen f haben soll, die durch ihre FOURIER-Reihe dargestellt werden, müssen dann alle FOURIER-Koeffizienten von g gleich eins sein, denn bei einer Faltung zweier Funktionen multiplizieren sich die FOURIER-Koeffizienten. g hat also die FOURIER-Reihe

$$S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{k \cdot i\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

was offensichtlich unmöglich ist: Nach der BESSEL'schen Ungleichung müßte sonst nämlich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1$$

konvergieren, was natürlich nicht der Fall ist.

Wir können aber eine kleine Modifikation dieser Reihe, betrachten, nämlich

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t}.$$

Hier sorgt der Exponent $|k|$ im Falle $|r| < 1$ für eine starke Dämpfung der Koeffizienten mit großem Index, so daß es zumindest mit der BESSEL'schen Ungleichung keine Probleme mehr gibt: Die entsprechende Summe ist zusammengesetzt aus zwei konvergenten geometrischen Reihen. Falls auch $I_r(t)$ selbst konvergiert, können wir damit rechnen und hoffen, daß wir irgendwann einmal den Grenzübergang $r \rightarrow 1$ machen können, was dann *ungefähr* der Faltung mit der nicht existenten Funktion g entspricht.

Wir berechnen $I_r(t)$ über zwei geometrische Reihen:

Beschränken wir uns zunächst auf positive Indizes, so ist nach der Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t} &= \frac{1}{1 - r e^{i\omega t}} = \frac{1 - r e^{-i\omega t}}{(1 - r e^{i\omega t})(1 - r e^{-i\omega t})} \\ &= \frac{1 - r \cos \omega t + i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in einem der Summanden k durch $-k$, so ändert sich nichts am Koeffizienten $r^{|k|}$ und auch nichts am Realteil von $e^{k \cdot i\omega}$; der Imaginärteil allerdings ändert sein Vorzeichen. Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^0 r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t} = \frac{1 - r \cos \omega t - i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t}$$

der konjugiert komplexe Wert zu obiger Summe. Der Summand eins für $k = 0$ wurde in beiden Summen berücksichtigt, tritt aber in der Gesamtsumme nur einmal auf; also ist

$$\begin{aligned} I_r(t) &= \frac{1 - r \cos \omega t + i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t} + \frac{1 - r \cos \omega t - i r \sin \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t} - 1 \\ &= \frac{2 - 2r \cos \omega t}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t} - 1 = \frac{2 - 2r \cos \omega t - (1 + r^2 - 2r \cos \omega t)}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \omega t}. \end{aligned}$$

Diese Funktion wollen wir uns für verschiedene Werte von r etwas genauer ansehen.

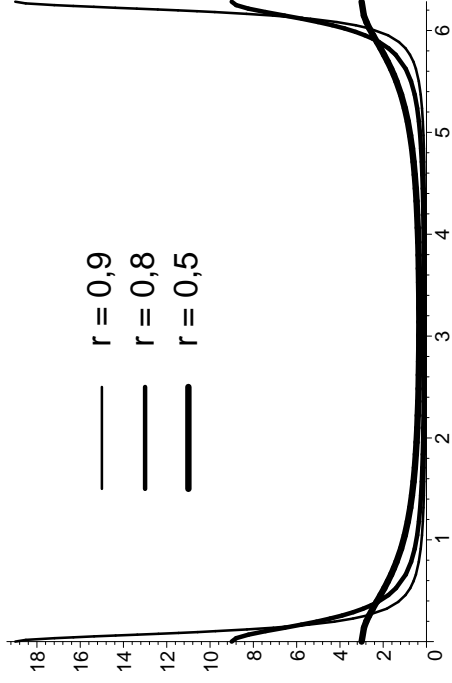


Abb. 13: $I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t}$

Abbildung 13 zeigt, daß sich I_r im offenen Intervall $(0, T)$ für $r \rightarrow 1$ immer stärker an die t -Achse annähert, wohingegen die Funktionswerte an den Intervallenden immer stärker ansteigen. In der Tat können wir für $0 < t < T$ beim Grenzübergang $r \rightarrow 1$ einfach $r = 1$ setzen und erhalten

$$I_1(t) = \frac{1-1^2}{2-2 \cos \omega t} = 0.$$

Für $t = 0$ oder T verschwindet dagegen auch der Nenner, und

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} I_r(0) &= \lim_{r \rightarrow 1} I_r(T) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r^2}{1+r^2-2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1+r)}{(1-r)} = \infty. \end{aligned}$$

Die Fläche unter der Kurve I_r im Intervall $[0, T]$ ist

$$\int_0^T \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \omega t} dt,$$

ein nicht sehr angenehm aussehendes Integral.

Die Mathematik stellt allerdings seit über hundert Jahren Algorithmen zur Verfügung, mit denen sich nicht nur entscheiden läßt, ob Funktionen wie I_r eine elementar ausdrückbare Stammfunktion haben, sondern auch berechnen, wie diese Stammfunktion dann aussieht. In den gängigen Computeralgebrasystemen sind diese Algorithmen zumindest teilweise implementiert, und wenn es auch zu weit führen würde, hier zu erklären, wie man eine Stammfunktion des Integranden

$$I_r(t) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \omega t}$$

findet, läßt sich doch das Ergebnis

$$F_r(t) = \int I_r(t) dt = -\frac{2}{\omega} \arctan \left(\frac{r+1}{r-1} \tan \frac{\omega t}{2} \right) + C$$

leicht verifizieren: Nach der Kettenregel ist zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \arctan \left(a \tan \frac{\omega t}{2} \right) &= \frac{1}{1+a^2 \tan^2 \frac{\omega t}{2}} \cdot \frac{a\omega}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega t}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\omega}{\cos^2 \frac{\omega t}{2} + a^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\omega}{1+(a^2-1) \sin^2 \frac{\omega t}{2}}. \end{aligned}$$

Mit der Beziehung

$$\sin^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{1-\cos \omega t}{2}$$

wird das zu

$$\frac{1}{2} \frac{a\omega}{1+\frac{a^2-1}{2}-\frac{1}{2} \cos \omega t} = \frac{a\omega}{(a^2+1)-(a^2-1) \cos \omega t}.$$

Für $a = \frac{r+1}{r-1}$ ist

$$a^2+1 = 2 \cdot \frac{r^2+1}{(r-1)^2} \quad \text{und} \quad a^2-1 = \frac{4r}{(r-1)^2},$$

also wird der Ausdruck zu

$$\frac{r+1}{r-1} \cdot \omega = \frac{(r^2-1)\omega}{2 \cdot \frac{r^2+1}{(r-1)^2} - \frac{4r}{(r-1)^2} \cos \omega t} = \frac{(r^2-1)\omega}{2(r^2+1) - 4r \cos \omega t}.$$

Um die Ableitung von F_r zu berechnen, müssen wir das noch mit $-2/\omega$ multiplizieren, was genau den Integranden ergibt. Somit ist F_r eine Stammfunktion von I_r .

Daß es mit dieser Stammfunktion ein Problem gibt, sieht man spätestens dann, wenn man naiv einsetzt und auf

$$\int_0^T I_r(t) dt = F_r(T) - F_r(0) = 0 - 0 = 0$$

kommt, denn aus geometrischen Gründen ist völlig klar, daß das Integral für $r < 1$ positiv sein muß.

Das Problem ist natürlich die Singularität des Tangens im Punkt $\frac{\pi}{2}$: Für $t = \frac{\pi}{2}$ ist F_r nicht definiert, da der Tangens dort gegen plus oder minus unendlich geht – je nachdem, von welcher Seite wir kommen. Damit ist F_r keine auf dem ganzen Integrationsintervall definierte Stammfunktion, und das Integral kann nicht einfach durch Einsetzen der oberen und der unteren Grenze berechnet werden.

Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert von F_r existieren allerdings auch für $t = \frac{\pi}{2}$:

Für $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ist $\tan \frac{\omega t}{2}$ positiv und geht gegen $+\infty$ für $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Da der Faktor vor dem Tangens für alle $r \in (-1, 1)$ negativ ist, folgt

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \pi/2 \\ t < \pi/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega} \lim_{u \rightarrow -\infty} \arctan u = -\frac{2}{\omega} \frac{-\pi}{2} = \frac{T}{2}.$$

Für $\frac{\pi}{2} < t < T$ dagegen ist $\tan \frac{\omega t}{2}$ negativ und geht gegen $-\infty$ für $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Somit ist

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \pi/2 \\ t > \pi/2}} F_r(t) = -\frac{2}{\omega} \lim_{u \rightarrow \infty} \arctan u = -\frac{2}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{T}{2}.$$

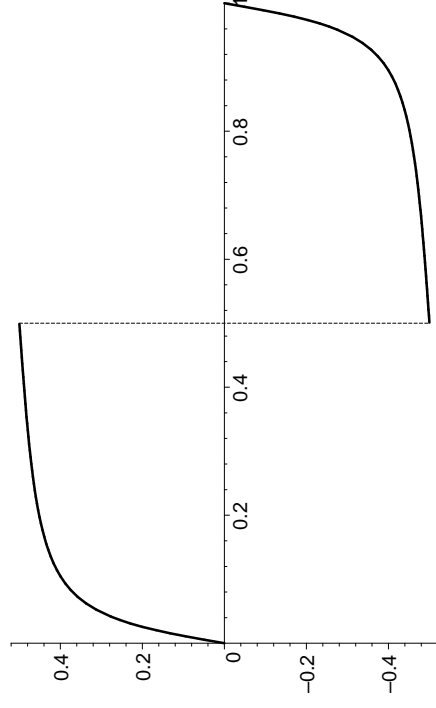


Abb. 14: $F_r(t)$ für $r = 0,8$ und $T = 2$

Abbildung 14 zeigt die Funktion F_r mit ihrer Sprungstelle in der Intervallmitte.

Zur Berechnung des Integrals von I_r über eine Periode spalten wir es auf in zwei Teilintegrale über Intervalle, in denen wir eine Stammfunktion haben, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^T I_r(t) dt &= \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t) dt \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow \pi/2 \\ t < \pi/2}} F_r(t) - F_r(0) + F_r(T) - \lim_{\substack{t \rightarrow \pi/2 \\ t > \pi/2}} F_r(t) \\ &= \frac{T}{2} - 0 + 0 + \frac{T}{2} = T. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_r(t) dt = 1 \quad \text{für alle } r \in (-1, 1)$$

und

$$\frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_r(t) dt = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T I_r(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Lassen wir nun r gegen eins gehen, ändert sich natürlich nichts an diesen Formeln, aber die beiden Integrale konzentrieren sich immer mehr auf die Umgebung von $t = 0$ bzw. $t = T$. Damit ist anschaulich ziemlich klar, daß für eine Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} I_r \star f(t) &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{T} \int_0^T f(t - \tau) I_r(\tau) d\tau \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} f(t - \tau) I_r(\tau) d\tau + \int_{\frac{T}{2}}^T f(t - \tau) I_r(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{2} (f(t^-) + f(t^+)), \end{aligned}$$

denn für $r \rightarrow 1$ geht $I_r(t)$ gegen null für alle t im Integrationsbereich außer $t = 0$ und $t = T$. Auf die genauen Abschätzungen zum Beweis dieser Aussage sei verzichtet.

Stattdessen wenden wir die Aussage an auf die Funktion f aus dem Satz; dafür besagt sie, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} I_r \star f(t) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Für $|r| < 1$ ist

$$I_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t}$$

absolut und gleichmäßig konvergent; deshalb kann die Summation mit Integration vertauscht werden und wir erhalten für $I_r \star f$ auch den

Ausdruck

$$\begin{aligned} I_r \star f(t) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-k \cdot i\omega \tau} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k \cdot i\omega t} \cdot \tilde{f}(k). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung alle FOURIER-Koeffizienten von f verschwinden, ist also $I_r \star f(t) = 0$ für alle r vom Betrag kleiner eins. Damit ist aber auch

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow 1} I_r \star f(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

wie behauptet. ■

Das war ein langer Beweis für eine nicht sonderlich aufregende Aussage; der Satz hat jedoch weitreichende Konsequenzen:

Eindeutigkeitssatz: a) Haben zwei Funktionen $f, g \in L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, so sind sie gleich.
b) Haben zwei Funktionen $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ dieselben FOURIER-Koeffizienten, so unterscheiden sie sich höchstens an Unstetigkeitsstellen.

Beweis: a) ist klar, denn dann erfüllt $f - g$ die Voraussetzungen des gerade bewiesenen Satzes.

Um b) auf a) zurückzuführen, definieren zwei neue Funktion

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-)) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(t) = \frac{1}{2} (g(t^+) + g(t^-));$$

aus $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Diese unterscheiden sich von f bzw. g höchstens in deren Unstetigkeitsstellen; insbesondere haben f und \tilde{f} sowie g und \tilde{g} also dieselben FOURIER-Koeffizienten. Nach a) ist daher $\tilde{f} = \tilde{g}$, und die

ursprünglichen Funktionen f und g unterscheiden sich davon höchstens in ihren jeweiligen Unstetigkeitsstellen. ■

Speziell können wir diesen Satz anwenden auf eine stetige stückweise differenzierbare Funktion f : Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, daß deren FOURIER-Reihe absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Funktion S_f konvergiert, die dieselben FOURIER-Koeffizienten wie f hat. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt also

Satz: Die FOURIER-Reihe einer stetigen stückweise differenzierbaren Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f . ■

Kombinieren wir dies mit den speziellen Beispielen aus §3, so erhalten wir den folgenden

Hauptsatz: $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sei stückweise stetig differenzierbar.

a) Ist f in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe dort gleichmäßig gegen f .

b) In jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die FOURIER-Reihe gegen

$$\frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

c) In jeder Sprungstelle von f tritt das GIBBS-Phänomen auf, d.h. die Teilsommen der FOURIER-Reihe überschwingen die Funktion um einen Betrag, der asymptotisch gleich der Sprunghöhe mal einem Faktor

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Si}(\pi) - 1 \right) \approx 0.089489872$$

ist.

Beweis: Für stetiges f ist a) klar nach dem vorigen Satz und sowohl b) als auch c) sind auch klar, da es keine Sprungstellen gibt, so daß der Wert in b) immer gleich $f(t)$ ist.

Für unstetiges f seien t_1, \dots, t_r die Unstetigkeitsstellen im Intervall $[0, T)$; die Sprunghöhen dort seien

$$a_i \stackrel{\text{def}}{=} f(t_i^-) - f(t_i^+).$$

Mit der aus §3c) bekannten Sägezahnsschwingung

$$s(t) = \begin{cases} \frac{T}{4} - \frac{t}{2} & \text{für } 0 < t < T, \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases},$$

periodisch fortgesetzt mit Periode T , ist dann

$$s_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2a_i}{T} s(t - t_i)$$

eine weitere stückweise differenzierbare Funktion, die ebenfalls Sprunghöhe a_i an der Stelle t_i hat. Also ist auch

$$\tilde{f}(t) = f(t) - \sum_{j=1}^r s_j(t)$$

eine stückweise differenzierbare Funktion, die nun aber *keine* Sprunghöhen mehr hat; \tilde{f} ist also stetig und erfüllt daher alle Behauptungen des Satzes.

Für die Funktion s haben wir die drei Behauptungen des Satzes in §3e) und f) explizit nachgerechnet; da sie unter Verschiebung und Reskalierung invariant sind, gelten sie auch für die Funktionen s_i . Damit gelten

$$\text{sie aber auch für } f(t) = \tilde{f}(t) + \sum_{j=1}^r s_j(t). \quad \blacksquare$$

Da praktisch alle Funktionen, deren FOURIER-Reihen man in technischen Anwendungen betrachtet, stückweise differenzierbar sind, wollen wir es für die punktweise Konvergenz bei diesem Satz bewenden lassen; für sonstige stückweise stetige Funktionen wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit einer schwächeren Konvergenzaussage begnügen.

f) Der Satz von Parseval

Im Zusammenhang mit der BESSELschen Ungleichung haben wir bereits die HERMITESchen Produkte in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ miteinander verglichen; jetzt wollen wir sehen, daß sie dieselben Werte liefern. Auch hierbei arbeiten wir mit Faltungen; wesentliches Hilfsmittel ist der folgende, implizit schon im vorigen Abschnitt verwendete

Satz: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe von $f \star g$ überall gleichmäßig gegen $f \star g$; sind $c_k = \widehat{f}(k)$ und $d_k = \widehat{g}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f und g , ist also für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$f \star g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{-k \cdot i \omega t} .$$

Aus diesem Satz lassen sich sehr einfach Eigenschaften der Faltung ableiten, z.B. gilt

Lemma: a) Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $f \star g = g \star f$
 b) Für $f, g, h \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$

Beweis: Betrachtet man die FOURIER-Reihen, werden die Behauptungen einfach zum Kommutativ- und Assoziativgesetz der Multiplikation komplexer Zahlen.

(Man könnte das Lemma natürlich auch direkt durch Integration beweisen.)

Wir wollen den obigen Satz verwenden, um folgende Formel zu beweisen:

Satz von Parseval: Für $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

$$(f, g) = (\widehat{f}, \widehat{g}) ,$$

d.h. für die FOURIER-Koeffizienten c_k von f und d_k von g ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt .$$

Zum *Beweis* brauchen wir eine Funktion, deren FOURIER-Koeffizienten die Zahlen $\overline{d_k}$ sind. Komplexe Konjugation der FOURIER-Reihe zu g führt zu

$$\overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{k \cdot i \omega t}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{-k \cdot i \omega t} .$$

Ersetzen wir hierin noch t durch $-t$, erhalten wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{d_k} e^{k \cdot i \omega t}$$

als FOURIER-Reihe von $\widetilde{g}(t) = \overline{g(-t)}$.

Somit ist $f \star \widetilde{g}$ eine Funktion mit FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} e^{k \cdot i \omega t} .$$

Da die FOURIER-Reihe einer Faltung stets gleichmäßig konvergiert und dieselben FOURIER-Koeffizienten hat wie die Faltung selbst, folgt aus dem Eindeutigkeitsatz des vorigen Abschnitts, daß diese Reihe in jedem Punkt t gegen $f \star \widetilde{g}(t)$ konvergiert. Speziell für $t = 0$ ist daher einerseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

und andererseits

$$f \star \widetilde{g}(0) = \widetilde{g} \star f(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \widetilde{g}(-\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) \overline{g(\tau)} d\tau .$$

Damit ist der Satz bewiesen. ■

Korollar: Sind $c_k = \widehat{f}(k)$ die FOURIER-Koeffizienten von f , so ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt .$$

Gelegentlich wird auch dieses Korollar als Satz von PARSEVAL bezeichnet.

Der französische Mathematiker MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÉNES (1755–1836) publizierte nur fünf mathematische Arbeiten; die 1799 veröffentlichte zweite davon enthält den hier betrachteten Satz.

Als überzeugter Royalist kam PARSEVAL während der französischen Revolution 1792 ins

Gefängnis; später mußte er aus Frankreich fliehen, weil ihn NAPOLEON wegen regimiekri- tischer Gedichte verhaften lassen wollte.

Obiges Korollar liefert oft interessante spezielle Werte unendlicher Rei- hen: Für den Sägezahn mit Periode 2π etwa ist im Intervall $(0, 2\pi)$

$$s(t) = \frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2ki} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

mit

$$c_k = \begin{cases} -\frac{i}{2k} & \text{für } k > 0 \\ 0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{i}{2k} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Somit ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi - t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{8\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Der Satz von PARSEVAL liefert auch schnell die im vorigen Abschnitt angekündigte schwächere Konvergenzaussage für beliebige stückwei- se stetige periodische Funktionen: Mit dem HERMITESCHEN Produkt in $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ können wir in der üblichen Weise eine Norm

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

definieren und sagen, eine Folge f_1, f_2, \dots konvergiere in der L^2 -Norm gegen f , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{2,T} = 0$$

ist. Dann gilt:

Satz: Für jedes $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ konvergiert die FOURIER-Reihe in der L^2 -Norm gegen f .

Beweis: Wie wir beim Beweis der BESSELSchen Ungleichung gesehen haben, gilt mit $c_k = \hat{f}(k)$ für die Teilsumme

$$S_N = \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i\omega t},$$

daß

$$\|f - S_N\|_{2,T}^2 = (f - S_N, f - S_N) = (f, f) - \sum_{k=-N}^N |c_k|^2.$$

Nach dem Satz von PARSEVAL geht die rechts stehende Differenz für $N \rightarrow \infty$ gegen null, also auch $\|f - S_N\|_{2,T}$. ■

g) Hilbert-Räume

In §2 hatten wir das Problem der harmonischen Analyse verglichen mit dem Problem, einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ bezüglich einer Orthonormalba- sis darzustellen; die einfachste Lösung besteht bekanntlich darin, die Skalarprodukte von \vec{v} mit den Basisvektoren \vec{b}_i zu bilden; dann ist

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n (\vec{v} \cdot \vec{b}_k) \vec{b}_k.$$

Genauso haben wir nun bei der Berechnung einer komplexen FOURIER- Reihe einer Funktion $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = (f, e^{k \cdot i\omega t})$ gebildet für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ und gesehen, daß zumindest für stückweise differenzierbare Funktionen aus $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k \cdot i\omega t}$$

ist, eine sehr ähnliche Situation also.

Es gibt allerdings einen entscheidenden Unterschied: Im Gegensatz zur endlichen Summe oben haben wir hier eine Summe, in der im allgemeinen unendlich viele der Summanden von Null verschieden sind. Eine solche unendliche Summe kann nur sinnvoll definiert werden, wenn wir einen Konvergenzbegriff haben, wie dies etwa in \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n der Fall ist; über Körpern wie \mathbb{Q} oder auch über endlichen Körpern hätten unendliche Summen überhaupt keine sinnvolle Interpretation.

In der linearen Algebra verlangt man daher aus gutem Grund von einer Basis, daß sich alle Vektoren als *endliche* Linearkombinationen von Basisvektoren darstellen lassen, auch wenn die Basis selbst unendlich sein kann.

Aus diesem Grund bilden die Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ keine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, und sie sind auch keine Basis des Untervektorraums aus allen stückweise differenzierbaren Funktionen mit der Mittelwerteneigenschaft: Sie bilden nur eine Basis des sehr viel kleineren Untervektorraums der (komplexen) trigonometrischen Polynome. Die in §3b) betrachtete Rechteckschwingung f mit Periode T gehört bereits nicht mehr zu diesem Untervektorraum und ist in der Tat linear unabhängig von den Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$: Andernfalls gäbe es nämlich eine nichttriviale endliche Linearkombination

$$\lambda_0 f(t) + \lambda_1 e^{k_1 \cdot i\omega t} + \dots + \lambda_r e^{k_r \cdot i\omega t} = 0,$$

in der λ_0 nicht verschwinden darf, da sonst die $e^{k \cdot i\omega t}$ linear abhängig wären.

Also wäre

$$f(t) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} e^{k_1 \cdot i\omega t} + \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_0} e^{k_r \cdot i\omega t},$$

$f(t)$ als endliche Linearkombination stetiger und differenzierbarer Funktionen selbst stetig und differenzierbar, was natürlich absurd ist.

Wenn wir die reinen Schwingungen zu einer Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ergänzen wollen, müssen wir also beispielsweise den Rechteckimpuls als neues Basiselement dazunehmen und, wie man sich leicht überlegt, auch noch den Sägezahn. Tatsächlich muß man noch eine ganze Reihe

anderer Funktionen mit hinzunehmen, und bis heute hat es niemand geschafft, eine Basis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ hinzuschreiben.

Der letzte Satz sollte zumindest diejenigen nicht verwundern, die sich aus dem letzten Semester noch an die dortige Diskussion im Zusammenhang mit der Existenz von Basen erinnern: Wir hatten dies nur für endlichdimensionale Vektorräume bewiesen, da es im unendlichdimensionalen Fall logische Schwierigkeiten gibt: Man muß das absolut nichtkonstruktive Auswahlaxiom benutzen, das zu allem Überfluß auch noch von den restlichen Axiomen der Mengenlehre unabhängig ist, so daß zumindest im Prinzip auch eine Mathematik ohne Auswahlaxiom möglich ist. Dort ist dann nicht beweisbar, daß jeder Vektorraum eine Basis hat – was freilich nicht bedeutet, daß nun beweisbar wäre, daß irgendein Vektorraum *keine* Basis hätte.

Von daher ist zumindest für alle praktischen Zwecke das System der Funktionen $e^{k \cdot i\omega t}$ die beste Annäherung an eine Basis, die man bekommen kann.

Sie ist in vielfacher anderer Hinsicht eine Verallgemeinerung der Standardbasis des \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n : Beispielsweise besagt der Satz von PARSEVAL, daß wir den Abstand (bezüglich der L_2 -Norm) zwischen zwei Funktionen, die beide bezüglich dieser Basis dargestellt sind, genauso ausrechnen können, wie wir das vom EUKLIDISCHEN oder HERMITESCHEN Abstand her gewohnt sind – nur daß wir es jetzt eben mit einer unendlichen Summe von Quadraten zu tun haben.

Da eine solche Situation in Funktionenräumen alles andere als selten vorkommt und FOURIER-Reihen beileibe nicht die einzigen unendlichen Summen ihrer Art mit praktischer Bedeutung sind, hat die Mathematik hierfür einen Begriffsapparat nebst zugehörigen Techniken entwickelt, die wir hier in dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt brauchen, die aber in manchen Gebieten beispielsweise der Signalverarbeitung oder der optischen Übertragungstechnik eine wichtige Rolle spielen, die Theorie der HILBERTRÄUME:

Definition: Ein EUKLIDISCHER oder HERMITESCHER Vektorraum V heißt HILBERT-Raum, wenn jede CAUCHY-Folge aus V gegen ein Element von V konvergiert.



DAVID HILBERT (1862–1943) wurde in Königsberg geboren, wo er auch zur Schule und zur Universität ging. Er promovierte dort 1885 mit einem Thema aus der Invariantentheorie, habilitierte sich 1886 und bekam 1893 einen Lehrstuhl. 1895 wechselte er an das damalige Zentrum der deutschen wie auch internationalen Mathematik, die Universität Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1930 lehrte. Seine Arbeiten umfassen ein riesiges Spektrum aus unter anderem Invariantentheorie, Zahlentheorie, Geometrie, Funktionalanalysis, Logik und Grundlagen der Mathematik sowie auch zur Relativitätstheorie. Er gilt als einer der Väter der modernen Algebra.

Offensichtlich ist jeder EUKLIDISCHE oder HERMITISCHE Vektorraum endlicher Dimension ein HILBERT-Raum, denn wir können den Raum vermöge irgendeiner Orthonormalbasis mit \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n identifizieren und das CAUCHYSche Konvergenzkriterium komponentenweise anwenden. Von den unendlichdimensionalen Vektorräumen $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die uns in Augenblick interessieren, ist leider keiner ein HILBERT-Raum, denn wie wir schon gesehen haben ist weder $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein EUKLIDISCHER noch $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ein HERMITESCHER Vektorraum, da es stückweise stetige Funktionen gibt, deren Norm $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ verschwindet, ohne daß f die Nullfunktion wäre.

Wenn wir uns auf die Unterräume $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ beschränken, haben wir zwar Skalarprodukte, aber die Vollständigkeit ist alles andere als klar.

Dieses Problem wollen wir (wie in den Anwendungen üblich) weitgehend ignorieren; wir bezeichnen einfach für *jeden* \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -Vektorraum V mit einem Produkt, das bis auf die Forderung

$$\langle f, f \rangle = 0 \implies f \equiv 0$$

EUKLIDISCHE bzw. HERMITESCH ist, eine Teilmenge $H \subseteq V$ als HILBERT-Raumbasis, wenn es für jedes Element $f \in V$ eine Folge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus H und eine Folge $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gibt, so daß

$$\delta_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i - f$$

für $N \rightarrow \infty$ die Eigenschaft hat, daß $\lim_{N \rightarrow \infty} (\delta_N, \delta_N) = 0$ ist.

In diesem Sinne ist das System der Funktionen $e^{k \cdot i \omega t}$ nach der Diskussion im vorigen Abschnitt eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (auch wenn wir das nur für den Untervektorraum der stückweise differenzierbaren Funktionen beweisen haben), und damit ist auch das System der Funktionen $1, \sin k \omega t, \cos k \omega t$ eine HILBERT-Raumbasis von $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solche HILBERT-Raumbasen sind in dieser Allgemeinheit leider noch nicht sonderlich nützlich für praktische Anwendungen: Will man einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination von *irgendeiner* Basis $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ darstellen, muß man ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbekannten lösen. Für endliches n ist das für große n zwar nicht mehr sehr angenehm, aber doch grundsätzlich möglich und per Computer auch noch für n in der Größenordnung von hundert Tausend durchaus praktikabel.

Wird die Dimension allerdings unendlich, so läßt sich ein System aus unendlich vielen Gleichungen in unendlich vielen Variablen nur in sehr speziellen Fällen wirklich lösen; einer davon ist der, den wir bei der Berechnung des FOURIER-Reihe ausgenutzt haben: Im Falle einer abzählbaren orthogonalen HILBERT-Raumbasis $\{\vec{b}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}_i}{\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i} \vec{b}_i$$

leicht berechenbar; noch einfacher wird es, wenn wir von einer orthogonalen HILBERT-Raumbasis ausgehen, da dann alle Nenner eins sind.

Solche orthogonale bzw. orthonormale HILBERT-Raumbasen bezeichnet man als *vollständige Orthogonalsysteme* bzw. *vollständige Orthonormalsysteme*.

h) Die Poisson-Formel

Der Konvergenzbeweis für FOURIER-Reihen war sehr abstrakt; in diesem Abschnitt wollen wir sehen, daß die Methoden, die wir dabei kennengelernt haben, auch nützlich sein können bei der Lösung eines praktischen Problems:

Bei bildgebenden Verfahren der Medizintechnik, bei Werkstoffuntersuchungen, Wärmeleitungsproblemen und vielen anderen Anwendungen hat man es oft mit folgendem *Randwertproblem* zu tun: Man kennt eine Funktion am Rand einer Fläche oder eines Volumens und möchte sie auch im (physikalisch oft unzugänglichen) Innern berechnen.

Sofern man keine einschränkenden Annahmen über die Funktion macht, ist dieses Problem natürlich weit von einer eindeutigen Lösbarkeit entfernt; in vielen interessanten Fällen ist es allerdings eindeutig lösbar.

Wir wollen hier nur ein ganz einfaches Beispiel betrachten: eine auf der Kreislinie bekannte Funktion, die ins Kreisinnere hinein fortgesetzt werden soll. Dabei wollen wir verlangen, daß die Funktion überall der *Kontinuitätsgleichung* $\Delta u = 0$ genügt, wie das beispielsweise für elektrische Potentiale in Abwesenheit von Ladungen der Fall ist. Solche Funktionen haben wir bereits in §1 betrachtet und dort als *harmonische* Funktionen bezeichnet; wir wissen, daß sie gerade die Realteile holomorpher Funktionen sind.

Aus §1d) wissen wir, daß holomorphe Funktionen nach der CAUCHYSCHEN Integralformel im Innern eines einfach zusammenhängenden Gebiets durch ihre Werte auf der Randkurve bestimmt sind; hier wollen wir Hilfe von FOURIER-Reihen eine entsprechende Formel für harmonische Funktionen finden.

In Polarkoordinaten ausgedrückt ist der LAPLACE-Operator nach [HM1], Kap. 2, §2g1) gleich

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi};$$

für $u(r, \varphi) = r^k \cos k\varphi$ und $u(r, \varphi) = r^k \sin k\varphi$ rechnet man leicht nach, daß $\Delta u = 0$ ist. Damit ist auch

$$\Delta(r^{\pm k} e^{\pm k i \varphi}) = 0$$

und allgemeiner

$$\Delta u(r, \varphi) = 0 \quad \text{für} \quad u(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|} e^{k i \omega t},$$

falls die Summe konvergiert. Für ein Randwertproblem ist die Funktion brauchbar, wenn zusätzlich auch noch

$$u_0(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 1} u(r, \varphi)$$

für alle Winkel φ existiert.

Ein spezielles Beispiel einer konvergenten Summe ist die Funktion I_r aus Abschnitt e); wenn wir als Argument anstelle von ωt die Winkelvariable φ einsetzen, ist für $|r| < 1$

$$I_r(\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{k i \varphi} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}.$$

Da $I_r \star u_0$ für stetige Funktionen im Limes $r \rightarrow 1$ gerade u_0 ist, ist für eine vorgegebene Funktion u_0

$$u(r, \varphi) = I_r \star u_0(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2) u_0(\psi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \psi)} d\psi$$

eine Fortsetzung ins Innere mit $\Delta u(r, \varphi) = 0$. Das ist die POISSONSCHE Integralformel zur Lösung dieses einfachen Randwertproblems.



SIMÉON DENIS POISSON (1781–1842) studierte zunächst Medizin, dann ab 1798 Mathematik an der *Ecole Polytechnique* bei LAPLACE und LAGRANGE. 1802 bekam er eine Stelle als Astronom am *Bureau des Longitudes*, 1809 wurde er Professor für reine Mathematik an der neugegründeten *Faculté des Sciences*. Er arbeitete hauptsächlich über bestimmte Integrale und FOURIER-Theorie, schrieb aber auch ein wichtiges Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie (in dem die POISSON-Verteilung erstmalig auftaucht) und Arbeiten über Mechanik, Astronomie, Elektrizität und Magnetismus.

§5: Fourier- und Laplace-Transformationen

In den vorigen Paragraphen haben wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Kosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen

nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind: Da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache eine festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe zumindest die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben.

Daher brauchen wir für nichtperiodische Funktionen im Allgemeinen ein kontinuierliches Frequenzspektrum; dieses liefert uns für hinreichend gutartige Funktionen die FOURIER-Transformation. Die LAPLACE-Transformation ist eine Variante davon, die zwar inhaltlich etwas schwerer zu interpretieren ist als die FOURIER-Transformation, die dafür aber für größere Funktionsklassen existiert. Außerdem gibt es zur LAPLACE-Transformation sehr viel ausführlichere Tabellen als zur FOURIER-Transformation

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Zur Konstruktion der FOURIER-Transformation gehen wir aus von FOURIER-Reihen:

Für eine beliebige reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (große) Periode T und betrachten die Funktion $f_T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt wird. Mit $\omega = 2\pi/T$ ist die FOURIER-Reihe von f_T gleich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f_T}(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ki\omega t} dt.$$

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können, definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\nu t} dt.$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T} C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi} C(k\omega),$$

und die FOURIER-Reihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega) e^{i(k\omega)t} \omega.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N C(k\omega) e^{i(k\omega)t} \omega,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega} \frac{1}{2\pi} C(\nu) e^{i\nu t} d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω . Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIER-Reihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} C(\nu) e^{i\nu t} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\nu) e^{i\nu t} d\nu,$$

sofern dieses existiert. Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\nu) e^{i\nu t} d\nu \quad \text{mit} \quad C(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\nu t} dt.$$

Um dies genauer zu untersuchen, geben wir diesen Konstruktionen Namen:

Definition: Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \end{cases}$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f .
Damit sollte dann also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

und diese Konstruktion, die f aus \hat{f} rekonstruiert, heißt *inverse FOURIER-Transformation*:

Definition: Für $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\hat{g}: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g .

Offensichtlich ist

$$\hat{\hat{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \hat{\hat{g}}(t) = 2\pi \hat{g}(-t).$$

Je nach Buch oder Vorlesung werden die Vorfaktoren gelegentlich auch anders gewählt, beispielsweise stand in der HM II bis 1998 der Faktor $1/2\pi$ vor der FOURIER-Transformation selbst statt vor ihrer inversen. Die jetzt gewählte Definition paßt besser zu der aus der hiesigen Elektrotechnik; dort wird die FOURIER-Transformation als

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

definiert, wobei j , wie in der Elektrotechnik üblich, für die in der Mathematik und Physik mit i bezeichnete imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ steht. Demnach ist also $F(j\omega) = \hat{f}(\omega)$.

Einige Autoren bevorzugen es auch, aus Symmetriegründen bei beiden Transformationen einen Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ zu verwenden, so daß je nach Buch durchaus sehr verschiedene Dinge gemeint sein können, wenn

von „der“ FOURIER-Transformation und ihrer Umkehrung die Rede ist. In allen Fällen sind die Faktoren aber so aufeinander abgestimmt, daß für hinreichend gutartige Funktionen die Beziehungen

$$\check{\hat{f}}(t) = f(t) \quad \text{und} \quad \hat{\check{f}}(t) = f(t)$$

gelten.

b) Die Laplace-Transformation

Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des ursprünglichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für $\check{\hat{f}}$ und $\hat{\check{f}}$ sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t) = 1$ oder auch $f(t) = e^{i\omega t}$ oder $f(t) = t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\hat{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren. Offensichtlich hat das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Konvergenzprobleme sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Bei vielen Anwendungen interessieren Funktionen vor allem für positive Werte von t (die „Zukunft“), während negative Werte (die „Vergangenheit“) vernachlässigt werden können. Um daher eine gegebene Funktion f so abzuändern, daß das FOURIER-Integral an der unteren Grenze keine Konvergenzprobleme mehr hat, setzen wir sie für $t < 0$ einfach auf null.

Für positive t dürfen wir nicht so radikal vorgehen; schließlich soll das Ergebnis noch etwas mit der Funktion f zu tun haben. Deshalb dämpfen wir hier die Funktion nur durch eine Exponentialfunktion. Insgesamt betrachten wir also anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t) e^{-rt} & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Den Funktionswert an der Stelle 0 legen wir so fest, daß die Funktion dort rechtsseitig stetig ist, d.h.

$$g(0) = f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

Die FOURIER-Transformierte dieser Funktion g_r bezeichnen wir, wenn sie existiert, als LAPLACE-Transformierte von f an der Stelle $s = r + i\omega$, in Zeichen

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Für gängige Funktionen f ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ist den meisten Formelsammlungen zu finden; es gibt auch umfangreiche Tabellenwerke, die ausschließlich der LAPLACE-Transformation gewidmet sind. Im allgemeinen wird sie nur für hinreichend große Werte von $r = \Re s$ existieren.

Die inverse LAPLACE-Transformation läßt sich aus der inversen FOURIER-Transformation ableiten: Wegen $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega) = \widehat{g}_r(t) = \widehat{g}_r(t)$ sollte $g_r(t)$ die inverse FOURIER-Transformierte von $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)$ sein; für $t > 0$ sollte daher

$$f(t) = e^{rt} g_r(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

sein. Für $t < 0$ können wir natürlich keine entsprechende Formel erwarten, da die Funktionswerte von f auf der negativen Achse bei der Berechnung der LAPLACE-Transformation ignoriert werden.

c) Erste Beispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir die Funktion $f(t) = \sin \omega t$. Ihr FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t e^{-i\omega t} dt$$

ist ein unendliches Integral über eine periodische Funktion, existiert also nicht. Auch ein CAUCHYSCHER Hauptwert kann nicht existieren, denn wenn auch $\sin \omega t$ eine ungerade Funktion ist, ist der Integrand als ganzes weder gerade noch ungerade, da $e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$ gerade Realteil, aber ungeraden Imaginärteil hat.

Das LAPLACE-Integral

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt$$

existiert für rein imaginäres $s = i\omega$ aus dem gleichen Grund nicht, und für ein s mit negativem Realteil kann es natürlich schon gar nicht existieren. Ist aber $\Re s > 0$, so liefert die Regel für partielle Integration

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \int_0^{\infty} \sin \omega t e^{-st} dt = \sin \omega t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \omega \cos \omega t \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

etwas Verwertbares: e^{-st} geht dann nämlich für $t \rightarrow \infty$ gegen null, und an der unteren Grenze $t = 0$ verschwindet $\sin \omega t$, so daß der erste Summand rechts insgesamt verschwindet. Der Integral ganz hinten ist bis auf den Faktor $-\omega/s$ die LAPLACE-Transformierte des Kosinus, d.h.

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s).$$

Auf das LAPLACE-Integral für den Kosinus wenden wir wieder die Regel der partiellen Integration an:

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-st} dt = \cos \omega t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \omega \sin \omega t \frac{e^{-st}}{-s} dt.$$

Hier bekommen wir an der unteren Grenze des ersten Terms rechts den Wert eins für den Kosinus, und an der oberen Grenze geht natürlich wieder der Exponentialfaktor gegen null, so daß

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{1}{s} + \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

ist. Insgesamt ist

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

oder

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right) \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2}.$$

Multiplikation mit s^2 macht daraus

$$(s^2 + \omega^2) \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \omega \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

für $\Re s > 0$. Damit kennen wir auch

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega} \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Auch bei den Potenzfunktionen $t \mapsto t^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es offensichtlich keine Chance, daß das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} t^n \sin \omega t dt$$

existiert; selbst der CAUCHYSche Hauptwert existiert nicht, denn wenn der Integrand des Realteils ungerade ist, ist der des Imaginärteils gerade und umgekehrt.

Die LAPLACE-Transformation verlangt die Berechnung von

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt.$$

Dieses Integral könnten wir induktiv durch partielle Integration berechnen; falls wir allerdings für n auch nicht ganzzahlige Werte einsetzen wollen, läßt es sich nicht mehr durch die uns bislang bekannten Funktionen ausdrücken.

Es läßt sich jedoch leicht zurückführen auf die sogenannte EULERSche *Gammafunktion*, die für positive Werte von x (oder allgemeiner für komplexe x mit positivem Realteil) definiert ist als

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Dies ist ein uneigentliches Integral: Es ist natürlich immer uneigentlich an der oberen Grenze, und für $0 < x < 1$ zusätzlich auch noch an der unteren. (Für $\Re x \leq 0$ divergiert das Integral.)

Die untere Grenze ist harmlos, denn für $0 < x < 1$ ist

$$e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1},$$

und für $0 < x < 1$ hat die Stammfunktion $\frac{t^x}{x}$ der rechten Seite einfach den Wert Null für $t = 0$.

Auch die obere Grenze ist unproblematisch: Da die Exponentialfunktion stärker wächst als jede Potenz, ist für hinreichend große Werte von t

$$e^t \geq t^{r+x-1} \iff e^{-t} t^{x-1} \leq \frac{K}{t^r}.$$

Dies gilt insbesondere für $r = 2$, und da $\int_1^{\infty} \frac{dr}{r^2} = 1$ konvergiert, gilt dasselbe für $\Gamma(x)$ an seiner oberen Grenze.

Die wichtigste Eigenschaft der Γ -Funktion folgt durch partielle Integration: Für $x > 0$ ist

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = e^{-t} \frac{t^x}{x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

oder

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

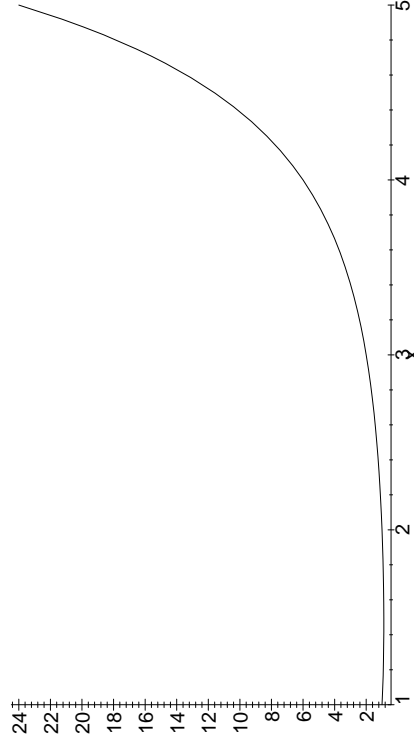


Abb. 15: Die Γ -Funktion

Aus dem elementar berechenbaren Wert

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1$$

ergibt sich somit, daß für alle natürliche Zahlen n gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$; die Γ -Funktion ist also nicht als eine Art stetig gemachter Fakultätsfunktion.

GAUSS definierte auf andere Weise eine stetige Funktion $\Pi(x)$, für die $\Pi(n) = n!$ ist, aber wie sich bald herausstellte, ist $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$, so daß nur eine der beiden Funktionen wirklich gebraucht wird. Nach einigen Modewechseln im letzten Jahrhundert entscheidet man sich heute meist für $\Gamma(x)$: Diese Funktionswerte sind in Tafelwerken tabelliert, und numerische Verfahren für ihre Berechnung stehen in den einschlägigen Unterprogrammbibliotheken und Computeralgebrasystemen zur Verfügung. Tatsächlich läßt sich $\Gamma(x)$ mit Hilfe komplexer Integrale sogar fortsetzen zu einer auf ganz \mathbb{C} meromorphen Funktion mit der Eigenschaft $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; die einzigen Pole sind die durch diese Eigenschaft erzwungenen bei Null und den negativen ganzen Zahlen.

Mit dieser Funktion können wir die LAPLACE-Transformierte von $f(t) = t^n$ sogar für jede *reelle* Zahl $n > -1$ leicht ausdrücken: Mit der Substitution $u = st$ wird

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{u^n}{s^n} e^{-u} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}.$$

Für nichtnegative ganze Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ vereinfacht sich dies zu

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Insbesondere ist die LAPLACE-Transformierte einer konstanten Funktion $f(t) = a$ gleich a/s . Genau dieselbe Transformierte hat natürlich auch die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases},$$

denn auf Werte an negativen Stellen kommt es bei der LAPLACE-Transformation nicht an.

Als nächstes wollen wir negative Potenzen t^{-n} betrachten. Deren LAPLACE-Transformation ist gegeben durch

$$\mathcal{L}\{t^{-n}\}(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^n} dt,$$

und dieses sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze ungentliche Integral existiert leider nicht: Für reelles $s > 0$ etwa ist für jedes $a > 0$ die Funktion e^{-as}/t^n überall im Intervall $(0, a]$ kleiner oder gleich dem Integranden; da ihre Stammfunktion $e^{-as}/(1-n)t^{n-1}$ für $n > 1$ und $e^{-as} \ln t$ für $n = 1$ für $t \rightarrow 0$ gegen unendlich geht, existiert das Integral

$$\int_0^a \frac{e^{-as}}{t^n} dt$$

für kein $a > 0$, und damit existiert erst recht das obige LAPLACE-Integral nicht.

Als Kuriosität am Rande sei erwähnt, daß dafür aber (nur) der CAUCHYSche Hauptwert des entsprechenden FOURIER-Integrals

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\omega t}}{t^n} dt$$

existiert: Für $n = 1$ haben wir in §3f) im Zusammenhang mit dem Integralsinus nachgerechnet, daß

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{t} dt = \pi i \quad \text{für alle } \omega > 0.$$

Ersetzen wir hier ω durch $-\omega$, wird der Integrand komplex konjugiert, also auch der CAUCHYSche Hauptwert des Integrals, und damit ist

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\omega t}}{t} dt = -\pi i \quad \text{für alle } \omega < 0.$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t$, das natürlich ebenfalls nicht existiert, das aber den CAUCHYSchen Hauptwert null hat, da der Integrand ungerade ist. Der CAUCHYSche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist also

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-i\omega t}}{t} dt = \begin{cases} -\pi i & \text{für } \omega > 0 \\ 0 & \text{für } \omega = 0 \\ \pi i & \text{für } \omega < 0 \end{cases}.$$

Für $n > 1$ kann man genau wie in §3f) argumentieren und erhält (mit den dortigen Bezeichnungen) die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n} dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n} dz$$

für den CAUCHYSchen Hauptwert. Reihenentwicklung der Exponentialfunktion führt auf

$$\int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n} dz = \int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k z^{k-n}}{k!} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^k}{k!} \int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} z^{k-n} dz.$$

Für $k = n - 1$ ist das rechtsstehende Integral

$$\int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} z^{-1} dz = \text{Ln}(\delta) - \text{Ln}(-\delta) = \text{Ln}(-1) = -\pi i$$

unabhängig von δ ; im Falle $k \neq n - 1$ verschwindet

$$\int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} z^{k-n} dz = \frac{\delta^{k-n+1} - (-\delta)^{k-n+1}}{k}$$

für $k \equiv n - 1 \pmod 2$ und ist gleich $2\delta^k/k$ sonst. Da die geometrische Reihe $2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k$ eine konvergente Majorante der Summe aller solcher Terme ist und für $\delta \rightarrow 0$ gegen null geht, folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^n} dt = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\alpha_\delta}^{\beta_\delta} \frac{e^{i\omega z}}{z^n} dz = \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \pi i \quad \text{für } \omega > 0.$$

Für $\omega < 0$ wird wieder der Integrand komplex konjugiert, also auch das Ergebnis; im Faktor $(i\omega)^{n-1}$ sorgt ω selbst für die komplexe Konjugation, so daß rechts nur πi konjugiert werden muß, d.h. der CAUCHYSche Hauptwert des FOURIER-Integrals ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^n} dt = \begin{cases} -\frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \pi & \text{für } \omega > 0 \\ \frac{(i\omega)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \pi & \text{für } \omega < 0 \end{cases}.$$

Für $\omega = 0$ haben wir das Integral über $1/t^n$, daß für ungerades n den CAUCHYSchen Hauptwert null hat und für gerades n gegen unendlich divergiert.

Als letztes Beispiel wollen wir eine der wichtigsten Funktionen der Elektrotechnik betrachten, den *Rechteckimpuls*. Wir beschränken uns hier auf einen zum Nullpunkt symmetrischen Impuls der Form

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } -b \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hier ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-b}^b ae^{-i\omega t} dt = \frac{a}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-b}^b \\ &= \frac{a}{\omega} \frac{e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}}{i} = \frac{2a \sin \omega b}{\omega}. \end{aligned}$$

Mit der in der Elektrotechnik sehr wichtigen Funktion

$$\text{sinc } t = \frac{\sin t}{t}$$

läßt sich dies auch schreiben als

$$\hat{f}(\omega) = 2ab \text{sinc } \omega b.$$

(Anstelle von $\text{sinc } t$ schreiben manche Autoren auch $\text{si } t$, man darf die Funktion aber nicht mit Ihrer Stammfunktion, dem Integralsinus $\text{Si } t$, verwechseln.)

Die LAPLACE-Transformierte dieses Rechteckimpulses ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^b ae^{-st} dt = \frac{a}{s} (1 - e^{-sb}),$$

und das ist gleichzeitig auch die LAPLACE-Transformierte der Rechteckimpulse

$$g(t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \leq t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad h(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

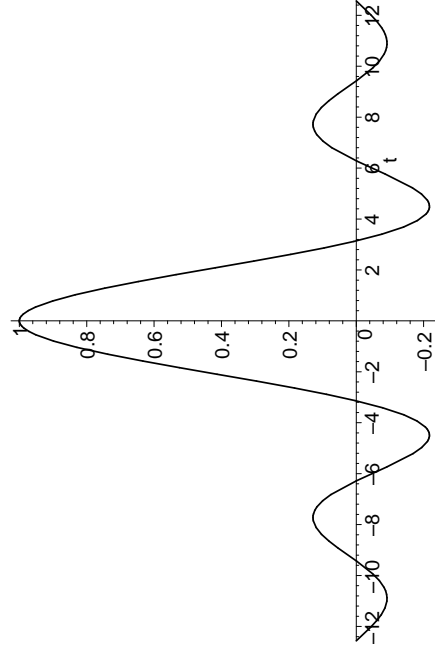


Abb. 16: Die Funktion $\text{sinc } t = \frac{\sin t}{t}$

Dagegen existiert die FOURIER-Transformierte $\widehat{h}_i(\omega)$ nicht einmal, und auch

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^b ae^{-i\omega t} dt = \frac{a}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_0^b \\ &= \frac{ia}{\omega} (e^{-i\omega b} - 1) \end{aligned}$$

ist deutlich verschieden von $\widehat{f}(\omega)$.

d) Erste Rechenregeln

Die gerade betrachteten Beispiele sind zwar mit die wichtigsten Funktionen, die in den gängigen Anwendungen auftauchen; allerdings findet man sie dort selten als *reine* Sinus- oder Kosinusschwingungen oder als *reine* Potenzen; häufiger sind Linearkombinationen dieser Funktionen, eventuell noch verbunden mit Phasenverschiebungen und anderen Transformationen des Arguments. In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Rechenregeln zusammengestellt werden, die in solchen Situationen gebraucht werden.

Die fundamentalste und einfachste Regel ist

Lemma: Sowohl die FOURIER- als auch die LAPLACE-Transformation sind lineare Operationen, d.h. für zwei Funktionen f, g und zwei komplexe Zahlen λ, μ gilt

$$\widehat{\lambda f + \mu g}(\omega) = \lambda \widehat{f}(\omega) + \mu \widehat{g}(\omega)$$

und

$$\mathcal{L}\{\lambda f + \mu g\}(s) = \lambda \mathcal{L}\{f\}(s) + \mu \mathcal{L}\{g\}(s),$$

sofern jeweils beide Seiten existieren. ■

Damit ist etwa

$$\mathcal{L}\{a \cos \omega t + b \sin \omega t\}(s) = \frac{as + b\omega}{s^2 + \omega^2},$$

und entsprechend läßt sich auch die LAPLACE-Transformation jedes trigonometrischen Polynoms berechnen.

Für ein Polynom $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ ist entsprechend

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{n! a_n}{s^{n+1}} + \frac{(n-1)! a_{n-1}}{s^n} + \dots + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s} \\ &= \frac{n! a_n + (n-1)! a_{n-1} s + \dots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ebenfalls sehr einfach läßt sich der Effekt von Verschiebungen sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich ausdrücken: Die FOURIER-Transformierte von $g(t) = f(t+c)$ berechnet sich mittels der Substitution $u = t + c$ als

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+c)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u-c)} du \\ &= e^{i\omega c} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} du = e^{i\omega c} \widehat{f}(\omega) \end{aligned}$$

und die LAPLACE-Transformierte als

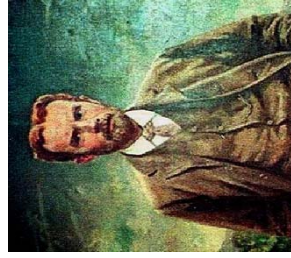
$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} f(t+c)e^{-st} dt = \int_c^{\infty} f(u)e^{-s(u-c)} du \\ &= e^{sc} \int_c^{\infty} f(u)e^{-su} du,\end{aligned}$$

eine Formel, die wegen der geänderten unteren Integrationsgrenze nicht sonderlich nützlich aussieht. Allerdings war hier auch von vornherein nicht viel zu erwarten, denn schon zur Definition der LAPLACE-Transformation müssen wir schließlich einen festen Zeitpunkt als Nullpunkt der Zeitskala auszeichnen, und niemand sollte sich wundern, daß Transformationen, die diese Auszeichnung nicht respektieren, bei der LAPLACE-Transformation zu Problemen führen. Man kann freilich das hintere Integral zumindest für $c > 0$ mit Gewalt als LAPLACE-Transformation auffassen, indem man den Integranden mit einer geeigneten Sprungfunktion multipliziert:

Die HEAVISIDE-Funktion ist definiert durch

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

Ein Funktionswert an der Stelle Null wird üblicherweise nicht definiert, die die Funktion praktisch immer nur in Integralen auftritt, wo es auf diesen einen Wert ohnehin nicht ankommt.



OLIVER HEAVISIDE (1850–1925) wurde in den Londoner Slums geboren und hatte nur wenig formale Ausbildung; an akademischer Wissenschaft hatte er zeitweils kein Interesse. Unter dem Einfluß seines Onkels CHARLES WHEATSTONE (nach dem die gleichnamige Brücke benannt ist) wandte er sich zur Telegraphie und arbeitete als Telegraphist zunächst in Dänemark, dann in Newcastle. In diesem Zusammenhang beschäftigte er sich mit Elektrizitätslehre; unter anderem brachte er die MAXWELLSchen Originalgleichungen (20 Gleichungen in 20 Unkenannten) auf die heute übliche Form. Weiter untersuchte er die Bedingungen für die störungsfreie Übertragung eines Signals,

sagte die für weitverbreiteten Kurzwellenfunktionen wesentliche Reflexionseigenschaft der Ionosphäre (HEAVISIDE-Schicht) voraus und entwickelte einen Operatorkalkül zur Übersetzung von Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen.

Mit Hilfe dieser Funktion können wir obige Gleichung umschreiben als

$$\mathcal{L}\{f(t+c)\}(s) = e^{sc} \mathcal{L}\{f(t)H(t-c)\}(s).$$

Im Frequenzbereich gibt es keine solchen Probleme; hier ist einfach

$$\widehat{f}(\omega+c) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega+c)t} dt = e^{-ict} \widehat{f}(\omega)$$

und

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s+c) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+c)t} dt = \mathcal{L}\{e^{-ct}f(t)\}(s).$$

Diese Formeln sind auch rückwärts gelesen sehr nützlich: Wollen wir etwa die LAPLACE-Transformierte einer gedämpften Schwingung

$$f(t) = e^{-\lambda t}(a \cos \omega t + b \sin \omega t)$$

berechnen, so ist

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{a \cos \omega t + b \sin \omega t\}(s+\lambda) = \frac{a(s+\lambda) + b\omega}{(s+\lambda)^2 + \omega^2}.$$

Auch die LAPLACE-Transformierte der Exponentialfunktion selbst läßt sich so ausrechnen: Für $\Re s > \lambda$ ist

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s-\lambda) = \frac{1}{s-\lambda},$$

denn auf $1 = t^0$ können wir die Formel für t -Potenzen anwenden.

Die FOURIER-Transformierte einer Exponentialfunktion existiert natürlich nicht, da das FOURIER-Integral immer an mindestens einer der beiden Grenzen divergiert.

Schließlich können wir noch ohne großen Aufwand den Effekt einer Streckung im Zeit- oder Frequenzbereich ausrechnen: Für $g(t) = f(ct)$

zeigt die Substitution $u = ct$, daß gilt

$$\widehat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{c}u} \frac{du}{c} = \frac{1}{c} \widehat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

und

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \int_0^{\infty} f(ct)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(u)e^{-\frac{s}{c}u} \frac{du}{c} = \frac{1}{c} \mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{c}\right).$$

Das Verhalten von FOURIER- und LAPLACE-Transformation im Zusammenhang mit Ableitungen, Produkten und Faltungen werden wir in den nächsten beiden Paragraphen ausführlich untersuchen.

§6: Ableitungen und Differentialgleichungen

Als erstes wollen wir die Transformationen von Ableitungen und die Ableitungen von Transformationen betrachten; wie sich zeigen wird, führt dies zu einer Methode, mit der sich Anfangswertprobleme für lineare Differentialgleichungen oft recht bequem lösen lassen. Es lohnt sich daher, zuerst noch etwas in Vorbereitungen zu investieren, um das notwendige Werkzeug bereitzustellen.

a) Ableitungen unter dem Integralzeichen

Lemma: a) Die Funktion $h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch

$$H: \begin{cases} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \int_c^d h(\omega, t) dt \end{cases}$$

stetig.

b) Ist h zusätzlich r -mal stetig partiell nach der ersten Variablen ω differenzierbar, so ist

$$\frac{d^r H}{d\omega^r}(\omega) = \int_c^d \frac{\partial^r h}{\partial \omega^r}(\omega, t) dt.$$

Beweis: a) Da $[a, b]$ und $[c, d]$ abgeschlossene Intervalle sind, ist h nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für jedes $t \in [c, d]$ gilt

$$|h(\omega_1, t) - h(\omega_2, t)| < \varepsilon \quad \text{falls} \quad |\omega_1 - \omega_2| < \delta.$$

Für solche ω_1 und ω_2 ist dann

$$|H(\omega_1) - H(\omega_2)| \leq \int_c^d |h(\omega_1, t) - h(\omega_2, t)| dt < \varepsilon(d - c).$$

Da $d - c$ eine Konstante ist, läßt sich dies durch Wahl von $\varepsilon = \eta/(d - c)$ unter jedes vorgegebene $\eta > 0$ drücken.

b) Für $\Delta \neq 0$ ist

$$\frac{H(\omega + \Delta) - H(\omega)}{\Delta} = \int_c^d \frac{h(\omega + \Delta, t) - h(\omega, t)}{\Delta} dt,$$

und der rechtsstehende Integrand ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gleich $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t)$ für ein ξ zwischen ω und $\omega + \Delta$. Für $\Delta \rightarrow 0$ geht dies gegen $\frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t)$, und da die partielle Ableitung als stetig vorausgesetzt wurde, gilt wegen a), daß

$$H'(\omega) = \lim_{\xi \rightarrow \omega} \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\xi, t) dt = \int_c^d \frac{\partial h}{\partial \omega}(\omega, t) dt$$

ist, wie behauptet. Für $r > 1$ folgt die Behauptung induktiv. ■

Als erste Anwendung folgt ein Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, der für die Inversion der FOURIER-Transformation fundamental sein wird:

Satz von Fubini: Für eine stetige Funktion $h: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t) dt \right) d\omega = \int_c^d \left(\int_a^b h(\omega, t) d\omega \right) dt.$$

Beweis: Das folgt entweder aus der zweidimensionalen Integrations-
theorie in [HMI], Kap. II, §6b), da beide Seiten das Integral

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} h(\omega, t) d\omega dt$$

berechnen, wobei das Rechteck $[a, b] \times [c, d]$ als Normalbereich einmal vom Typ I und einmal vom Typ II aufgefaßt wird. Es folgt aber auch leicht aus dem gerade bewiesenen Lemma:

Für $a \leq \omega \leq b$ sei

$$H(\omega) = \int_c^d \left(\int_a^\omega h(\xi, t) d\xi \right) dt.$$

Nach der zweiten Aussage des gerade bewiesenen Lemmas ist dann

$$H'(\omega) = \int_c^d h(\omega, t) dt,$$

also ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t) dt \right) d\omega = \int_a^b H'(\omega) d\omega = H(b) - H(a) = H(b),$$

und das ist nach Konstruktion gleich der rechten Seite. ■



Der italienische Mathematiker GUIDO FUBINI (1879–1943) arbeitete zunächst auf dem Gebiet der Differentialgeometrie, interessierte sich dann aber immer mehr für analytische Themen wie Differentialgleichungen und Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 1901 wurde er Professor in Catania auf Sizilien, später in Genua und ab 1908 in Turin, wo er blieb, bis er 1939 trotz seiner angegriffenen Gesundheit wegen des italienischen Faschismus nach USA emigrierte und ans Institute for Advanced Study in Princeton wechselte. Der hier zitierte Satz ist zwar sein bekanntestes, aber ganz sicher nicht sein bedeutendstes Ergebnis.

Wir interessieren uns im Augenblick nicht für Integrale über endliche Intervalle, sondern für Integrale über die gesamte reelle Gerade; bevor wir den gerade bewiesenen Satz auf FOURIER-Integrale anwenden können, müssen wir also noch den Grenzübergang $a, c \rightarrow -\infty$ und $b, d \rightarrow +\infty$ durchführen. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzkriterium gibt es hier keine Probleme, falls die betroffenen Integrale absolut konvergent sind. Die für uns interessante Version des Satzes von FUBINI ist also

Satz: Die stetige Funktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei so, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)| dt \right) d\omega \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)| d\omega \right) dt$$

beide konvergieren. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t) dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t) d\omega \right) dt.$$

b) Transformationen und Ableitungen

Die Aussagen des vorigen Abschnitts führen geradewegs auf Eigenschaften der FOURIER-Transformation; als erstes erhalten wir

Lemma: Ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mindestens r mal stetig differenzierbar und existieren die FOURIER-Transformationen von f, f' und $f^{(r)}$, so ist

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r t^r \widehat{f}(\omega) \quad \text{oder} \quad t^r \widehat{f}(\omega) = i^r \frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega) \quad \text{oder} \quad \widehat{f^{(r)}}(\omega) = (i\omega)^r \widehat{f}(\omega).$$

Beweis: Nach dem Lemma im vorigen Abschnitt ist

$$\begin{aligned} \frac{d^r \widehat{f}(\omega)}{d\omega^r} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{d\omega^r} \left(f(t) e^{-i\omega t} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^r f(t) e^{-i\omega t} dt = (-i)^r \widehat{t^r f}(\omega), \end{aligned}$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Für die zweite begnügen wir uns der Einfachheit halber mit dem Fall $r = 1$, aus dem die allgemeine Aussage per Induktion folgt. Für $r = 1$ ist

$$\omega \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \omega e^{-i\omega t} dt,$$

und dieses Integral läßt sich durch partielle Integration weiter umformen. Dazu nehmen wir $f(t)$ als den ersten Faktor und $\omega e^{-i\omega t}$ als den zweiten; letzterer hat die Stammfunktion

$$\frac{\omega e^{-i\omega t}}{-i\omega} = ie^{-i\omega t},$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \omega e^{-i\omega t} dt = f(t) \cdot ie^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t) \cdot ie^{-i\omega t} dt.$$

Da die FOURIER-Transformierte von f existiert, geht $f(t)$ für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen null; der erste Summand verschwindet also, und übrig bleibt

$$\omega \widehat{f}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-i\omega t} dt = -i \cdot \widehat{\dot{f}}(\omega).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Für die LAPLACE-Transformation gelten ähnliche Regeln: Falls die Funktion f mindestens r mal stetig differenzierbar ist und die LAPLACE-Transformierten ihrer Ableitungen existieren, ist nach der Regel über

partielle Integration

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\}(s) &= \int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \end{aligned}$$

und damit induktiv

$$\mathcal{L}\{f^{(r)}(t)\}(s) = s^r \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{r-1} f(0) - s^{r-2} \dot{f}(0) - \dots - f^{(r-1)}(0).$$

Dies ist etwas komplizierter als bei der FOURIER-Transformation, wo wir keine Funktionswerte an der Stelle null berücksichtigen mußten, aber für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist das meist ein *Vorteil*:

In der Praxis hat man es fast immer mit sogenannten *Anfangswertproblemen* zu tun, d.h. man kennt den Zustand eines Systems (beschreiben durch eine Funktion $f(t)$ der Zeit) zu einem gewissen Zeitpunkt t_0 , den wir der Einfachheit halber als null annehmen wollen, und man kennt Naturgesetze für die weitere Entwicklung des Systems. Letztere haben meist die Form von Differentialgleichungen; ein Anfangswertproblem besteht darin, daß man anhand der Differentialgleichung und der bekannten Funktionswerte zum Zeitpunkt t_0 die weitere Entwicklung des Systems berechnen will, d.h. die Funktion f . Wir werden uns im nächsten Kapitel ausführlich mit Differentialgleichungen beschäftigen; hier beschränken wir uns auf den in der Elektrotechnik sehr häufigen Fall einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, d.h. wir suchen eine Funktion $y(t)$, für die gilt

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

und

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus die algebrai-

sche Gleichung

$$\begin{aligned}
 & s^n \mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \dots - y_{(n-1)} \\
 & + a_{n-1}s^{n-1}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \dots - y_{(n-2)} \\
 & \vdots \\
 & + a_1s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0 \\
 & + a_0\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}(s)
 \end{aligned}$$

für $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$. Mit dem *charakteristischen Polynom*

$$f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

der Differentialgleichung und den Abkürzungen

$$c_{n-1} = y_0, \quad c_{n-2} = y_0 + y_1, \quad \dots \quad c_0 = y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}$$

läßt sich dies auch kürzer schreiben als

$$f(s) \cdot \mathcal{L}\{y(t)\}(s) - c_{n-1}s^{n-1} - c_{n-2}s^{n-2} - \dots - c_1s - c_0 = \mathcal{L}\{b(t)\}(s)$$

oder

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{b(t)\}(s) + c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \dots + c_1s + c_0}{f(s)}.$$

Falls sowohl die gesuchte Lösungsfunktion als auch die rechte Seite $b(t)$ LAPLACE-transformierbar sind, können wir also die LAPLACE-transformierte $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ der Lösungsfunktion leicht berechnen. Rücktransformation (meist anhand einer Tabelle) führt dann auf die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems – sofern wir wissen, daß eine Funktion $y(t)$ zumindest für $t > 0$ durch $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ eindeutig bestimmt ist.

Letzteres ist (abgesehen von kleineren Besonderheiten, die für praktische Anwendungen kaum eine Rolle spielen) in der Tat der Fall, allerdings wird der entsprechende Beweis – genau wie im Fall der FOURIER-Reihen – recht viel Arbeit kosten. Um zu sehen, daß sich diese Arbeit auch lohnt, wollen wir daher zunächst einige Anwendungen betrachten.

Bevor wir damit beginnen, sollten wir uns noch die Ableitung der LAPLACE-Transformierten einer Funktion anschauen: Wegen der Vertauschbarkeit der Integration über t und der Ableitung nach s erhalten

wir ohne jede Mühe die Formel

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(f(t)e^{-st}) dt \\
 &= - \int_0^\infty t f(t)e^{-st} dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s).
 \end{aligned}$$

Durch Induktion folgt für beliebiges $r \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\frac{d^r}{ds^r}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = (-1)^r \mathcal{L}\{t^r f(t)\}(s),$$

die bis auf den Vorfaktor $(-1)^r$ genauso aussieht wie die entsprechende Formel

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega) = i^r \widehat{t^r f}(\omega)$$

für die FOURIER-Transformation.

c) Ungedämpfte Schwingungen

Nach diesen Vorbereitungen können wir daran gehen, einige physikalisch interessante Anfangswertprobleme zu lösen.

Als erstes Beispiel betrachten wir die extrem einfache Gleichung für eine Masse an einer Feder, die sich reibungsfrei in x -Richtung bewegen kann:

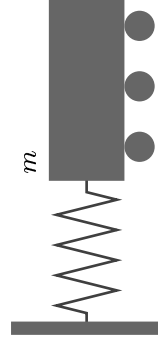


Abb. 17: Eine schwingende Masse

Nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft $\lambda x(t)$, die proportional ist zur Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage; nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz ist diese Kraft (eine zeitlich konstante Masse m vorausgesetzt) gleich $m\ddot{x}(t)$. Insgesamt ist also

$$m\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m} x(t) = 0.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2 \mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) + \frac{\lambda}{m} \mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

oder

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s \cdot x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \frac{\lambda}{m}}.$$

Die schwingende Masse m soll natürlich positiv sein, und auch λ ist größer als null, da $\lambda x(t)$ die *Rückstellkraft* ist. Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x(0) \cdot s + \dot{x}(0)}{s^2 + \omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2 + \omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}.$$

Hier erkennen wir die gerade berechneten LAPLACE-Transformierten ein

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

und folgern, daß $x(t)$, falls LAPLACE-transformierbar, die Form

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t$$

haben muß mit $\omega = \sqrt{\lambda/m}$. Die Masse schwingt also ungedämpft mit Frequenz $\sqrt{\lambda/m}$.

d) Gedämpfte Schwingungen

Ungedämpfte Schwingungen wir im letzten Abschnitt wird man in der Realität eher selten beobachten: In den meisten Fällen führen Reibungseffekte schließlich zum Abklingen der Schwingung. Die Reibungskraft wird in den einfachsten Modellen als proportional zur Geschwindigkeit angesetzt, d.h. die linke Seite der Differentialgleichung wird durch ein

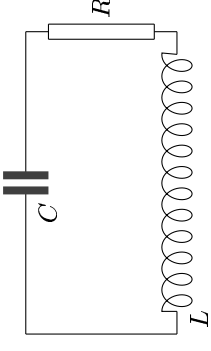


Abb. 18: Ein elektrischer Schwingkreis

konstantes Vielfaches von $\dot{x}(t)$ ergänzt. Dieselbe Art von Differentialgleichung erhalten wir auch, wenn wir eine Spule, einen Kondensator und einen Widerstand wie in Abbildung 18 hintereinanderschalten:

Damit hier ein Strom fließt, nehmen wir an, daß der Kondensator zur Zeitpunkt $t = 0$ eine Ladung Q_0 enthalte; die Ladung zum Zeitpunkt t sei $Q(t)$. Dann beträgt der Spannungsabfall am Kondensator

$$U_1(t) = \frac{Q(t)}{C},$$

der an der Spule ist nach der LENZSchen Regel gleich

$$U_2(t) = L\dot{I}(t) = L\dot{Q}(t),$$

wobei $I(t) = \dot{Q}(t)$ die Stromstärke bezeichnet, und am Widerstand haben wir natürlich nach dem OHMSchen Gesetz

$$U_3(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t).$$

Diese drei Spannungen müssen sich zu Null addieren, d.h.

$$L\dot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = 0.$$

Um bei der Lösung dieser Gleichung keine komplizierten Konstanten mitschleppen zu müssen, schreiben wir die Gleichung bis auf weiteres in der Form

$$\dot{Q}(t) + \rho\dot{Q}(t) + \sigma Q(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{R}{L} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{1}{LC}.$$

Außerdem schreiben wir $y(t)$ anstelle von $Q(t)$, um es einerseits mit gewohnten Variablen zu tun zu haben und andererseits, weil wir diesen

Typ von Gleichungen noch auf viele andere Probleme anwenden können, bei denen die gesuchte Funktion nicht als Ladung interpretiert werden kann. Wir interessieren uns für das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1.$$

Um zu sehen, wie sich die Lösungen solcher Gleichungen verhalten können, betrachten wir einige konkrete Beispiele. Beginnen wir mit dem Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 25y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2.$$

Für die LAPLACE-Transformierte $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ gilt dann

$$s^2 Y(s) - s - 2 + 8(sY(s) - 1) + 25Y(s) = (s^2 + 8s + 25)Y(s) - s - 10 = 0,$$

$$\text{also ist } Y(s) = \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 25}.$$

Wenn wir von der (bislang noch nicht bewiesenen) Annahme ausgehen, daß die gesuchte Funktion $y(t)$ durch ihre LAPLACE-Transformierte eindeutig bestimmt ist, müssen wir nun eine Funktion $y(t)$ finden, deren LAPLACE-Transformierte gleich $Y(s)$ ist. Unter den wenigen Beispielen, die wir bislang kennen, haben nur die Transformationen von Sinus und Kosinus quadratische Nenner, allerdings sind diese von der Art $s^2 + \omega^2$. Um einen linearen Term zu bekommen, müssen wir s durch $s + \lambda$ ersetzen; dies entspricht, wie wir gesehen haben, der Multiplikation mit einer Exponentialfunktion $e^{-\lambda t}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-\lambda t} \cos \omega t\}(s) &= \frac{s + \lambda}{(s + \lambda)^2 + \omega^2} \quad \text{und} \\ \mathcal{L}\{e^{-\lambda t} \sin \omega t\}(s) &= \frac{\omega}{(s + \lambda)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Wir müssen daher versuchen, den Nenner auf die Form $(s + \lambda)^2 + \omega^2$ zu bringen und den Zähler dann als Linearkombination von $s + \lambda$ und ω zu schreiben. Dies leistet einer der ältesten Tricks der Algebra, die schon

seit über 2000 Jahre bekannte quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 25} = \frac{s + 10}{(s + 4)^2 + 9} = \frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 3^2} + 2 \cdot \frac{3}{(s + 4)^2 + 3^2} \\ &= \mathcal{L}\{e^{-4t} \cos 3t\}(s) + 2\mathcal{L}\{e^{-4t} \sin 3t\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{e^{-4t} (\cos 3t + 2 \sin 3t)\}(s). \end{aligned}$$

Wenn wir, wie auch bei allen folgenden Beispielen, davon ausgehen, daß eine Funktion durch ihre LAPLACE-Transformation zumindest für alle positiven Werte von t eindeutig bestimmt ist, kennen wir also die gesuchte Funktion

$$y(t) = e^{-4t} (\cos 3t + 2 \sin 3t).$$

Sie beschreibt eine gedämpfte Schwingung der Art, wie sie in Abbildung 19 zu sehen ist. (Die Funktion $y(t)$ geht bezogen auf ihre Periode zu schnell gegen Null um ein interessantes Bild zu geben.)

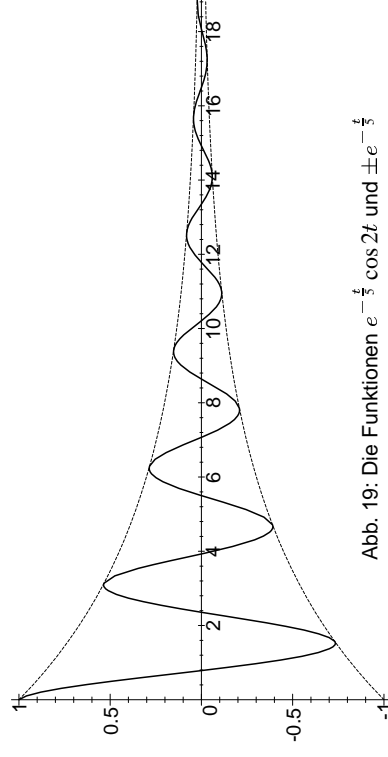


Abb. 19: Die Funktionen $e^{-\frac{4}{t}} \cos 2t$ und $\pm e^{-\frac{4}{t}}$

Als nächstes Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 15y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 3.$$

LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2 Y(s) - s - 3 + 8(sY(s) - 1) + 15Y(s) = (s^2 + 8s + 15)Y(s) - s - 11 = 0,$$

wobei wir wieder, wie auch in allen folgenden Beispielen, zur Abkürzung

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$$

setzen. Auflösen nach $Y(s)$ führt auf

$$Y(s) = \frac{s+11}{s^2+8s+15} = \frac{s+11}{(s+4)^2-1}.$$

Wegen des Minuszeichens im Nenner können wir dies nicht als LAPLACE-Transformation einer gedämpften Schwingung schreiben. Dafür sagt uns dieses Minuszeichen, daß der Nenner zwei *reelle* Nullstellen hat, nämlich -4 ± 1 , also -3 und -5 . Damit ist der Nenner auch gleich $(s+3)(s+5)$; via Partialbruchzerlegung können wir $Y(s)$ daher als Summe zweier rationaler Funktionen mit Nenner $s+3$ bzw. $s+5$ schreiben. Der Ansatz

$$\frac{a}{s+3} + \frac{b}{s+5} = \frac{(a+b)s+5a+3b}{(s+3)(s+5)} = \frac{s+11}{(s+3)(s+5)}$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$a+b=1 \quad \text{und} \quad 5a+3b=11.$$

Subtraktion von fünfmal der ersten Gleichung von der zweiten ergibt $-2b=6$, also ist $b=-3$ und $a=4$. Damit ist

$$Y(s) = \frac{4}{s+3} - \frac{3}{s+5}.$$

Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, daß $1/s$ die LAPLACE-Transformation der Konstanten Eins ist, also ist $1/(s+\lambda)$ die von $e^{-\lambda t}$. Somit ist $Y(s)$ die LAPLACE-Transformierte von $4e^{-3t} - 3e^{-5t}$, und dies ist auch die gesuchte Lösungsfunktion. In diesem Beispiel geht $y(t)$ also exponentiell gegen Null.

Als letztes Beispiel zu diesem Typ von Gleichungen wollen wir noch das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) + 8y(t) + 16 = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2$$

betrachten. Hier ist

$$s^2 Y(s) - s - 2 + 8(sY(s) - 1) + 16Y(s) = (s^2 + 8s + 16)Y(s) - s - 10 = 0,$$

also

$$Y(s) = \frac{s+10}{s^2+8s+16} = \frac{s+10}{(s+4)^2} = \frac{s+4}{(s+4)^2} + \frac{6}{(s+4)^2} = \frac{1}{s+4} + \frac{6}{(s+4)^2}.$$

Da $1/s^2$ die LAPLACE-Transformierte von t ist, entspricht der zweite Summand der Funktion $6te^{-4t}$, d.h. $Y(s)$ ist die LAPLACE-Transformierte von

$$y(t) = e^{-4t} + 6te^{-4t} = (1+6t)e^{-4t}.$$

Hier haben wir also ein Produkt einer Exponentialfunktion mit einer linearen Funktion. Wie Abbildung 20 zeigt, dominiert in solchen Fällen für kleine t die lineare Funktion, aber langfristig sorgt natürlich der Dämpfungsfaktor $e^{-\lambda t}$ dafür, daß sich die Funktion asymptotisch der Null annähert.

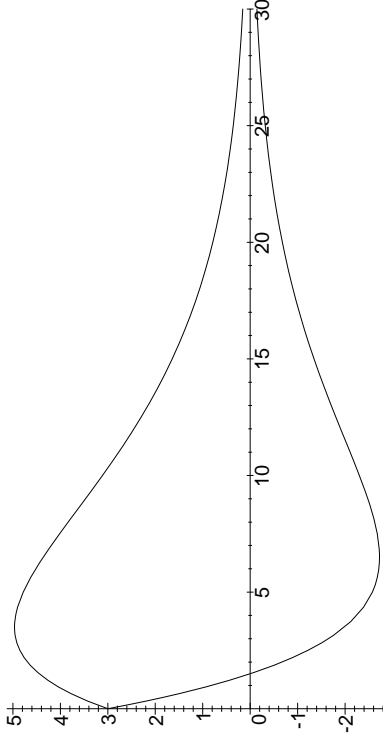


Abb. 20: Die Funktionen $(3 \pm 2t)e^{-\frac{t}{2}}$

Kehren wir zurück zum allgemeinen Fall, dem Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation ergibt

$$s^2 \mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 + \rho(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0) + \sigma \mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \frac{\rho}{2})^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}}.$$

Falls $\sigma > \rho^2/4$ können wir $\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$ setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2)^2 + \omega^2} = \frac{y_0(s + \rho/2)}{(s + \rho/2)^2 + \omega^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s + \rho/2)^2 + \omega^2}.$$

In diesen beiden Summanden erkennen wir (bis auf konstante Faktoren) die LAPLACE-Transformierten von $e^{-\rho t/2} \cos \omega t$ und $e^{-\rho t/2} \sin \omega t$, d.h.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\rho t/2} \cos \omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega} e^{-\rho t/2} \sin \omega t \\ &= e^{-\rho t/2} \left(y_0 \cos \omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega} \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

Der Kondensator entlädt sich also, wie es physikalisch zu erwarten war, aber der zeitliche Verlauf ist gegeben durch eine gedämpfte Schwingung. Die Dämpfung wird mit wachsendem $\rho = R/L$ immer stärker, d.h. je größer der Widerstand und je kleiner die Induktivität ist, desto schneller geht die Lösungsfunktion gegen Null.

Falls σ kleiner ist als $\rho^2/4$, können wir $\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma}$ setzen und haben

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2)^2 - \omega^2} = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2 + \omega)(s + \rho/2 - \omega)}.$$

Wie im obigen Beispiel ist hier eine Partialbruchzerlegung fällig; wegen

$$\frac{1}{(s + \rho/2) - \omega} - \frac{1}{(s + \rho/2) + \omega} = \frac{2\omega}{(s + \rho/2)^2 - \omega^2}$$

ergibt sich die LAPLACE-Transformierte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2)^2 - \omega^2} \\ &= \frac{1}{2\omega} \left(\frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2) - \omega} - \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2) + \omega} \right) \\ &= \frac{1}{2\omega} \left(\frac{y_0(s + \rho/2 - \omega) + y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s + \rho/2 - \omega} - \frac{y_0(s + \rho/2 + \omega) + y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s + \rho/2 + \omega} \right) \\ &= \frac{1}{2\omega} \left(y_0 + \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{s + \rho/2 - \omega} - y_0 - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{s + \rho/2 + \omega} \right) \\ &= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega} \cdot \frac{1}{s + \rho/2 - \omega} - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega} \cdot \frac{1}{s + \rho/2 + \omega}. \end{aligned}$$

Diese Summanden können wir nun als LAPLACE-Transformierte identifizieren und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega} \cdot \mathcal{L}\{e^{-(\rho/2 - \omega)t}\}(s) \\ &\quad - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega} \cdot \mathcal{L}\{e^{-(\rho/2 + \omega)t}\}(s). \end{aligned}$$

Die Lösung ist also

$$y(t) = \frac{y_0\rho/2 + y_1 + y_0\omega}{2\omega} \cdot e^{-(\rho/2 - \omega)t} - \frac{y_0\rho/2 + y_1 - y_0\omega}{2\omega} \cdot e^{-(\rho/2 + \omega)t}.$$

Wegen der Positivität von σ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma} < \sqrt{\frac{\rho^2}{4}} = \frac{\rho}{2};$$

daher sind dies zwei Exponentialfunktionen, die für $t \rightarrow \infty$ gegen null gehen. Damit entlädt sich der Kondensator in diesem Fall ohne Schwingungen gemäß einer Summe zweier abfallender Exponentialfunktionen.

Die Bedingung $\sigma < \frac{\rho^2}{4}$ übersetzt sich in

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{L^2} \quad \text{oder} \quad R > \sqrt{\frac{L}{C}};$$

wenn der Widerstand zu groß ist, dämpft er also so stark, daß es keine Schwingungskomponente mehr gibt.

Bleibt noch der Fall $\sigma = \rho^2/4$. Hier ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s + \rho/2)^2} = \frac{y_0(s + \rho/2)}{(s + \rho/2)^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s + \rho/2)^2} \\ &= \frac{y_0}{s + \rho/2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s + \rho/2)^2}. \end{aligned}$$

Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Eins ist und $1/s^2$ die der Identität, folgt

$$y(t) = \left(y_0 + \left(y_1 + y_0 \frac{\rho}{2} \right) t \right) e^{-\frac{\rho}{2}t}$$

Produkt einer linearen Funktion und einer abfallenden Exponentialfunktion.

e) Erzwungene Schwingungen

Im Stromkreis aus dem letzten Abschnitt floß nur deshalb ein Strom, weil der Kondensator aus irgendeinem Grund bereits aufgeladen war; üblicher wäre, daß ein Strom fließt, weil der Stromkreis eine Stromquelle enthält. Wir ergänzen deshalb den Stromkreis aus Abbildung 18 durch eine Wechselstromquelle mit Kreisfrequenz ω_0 . Die Differentialgleichung wird damit zu

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t,$$

in abstrakt-mathematischer Schreibweise geht es also um Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t.$$

Betrachten wir auch hierzu wieder zunächst einige Beispiele, etwa das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 25y(t) = 40 \cos t + 40 \sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 4.$$

Die LAPLACE-Transformation macht daraus

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - 2s - 4 + 8(sY(s) - 2) + 25Y(s) \\ = (s^2 + 8s + 25)Y(s) - 2s - 20 = \frac{40s + 40}{s^2 + 1}, \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$Y(s) = \frac{2s + 20}{s^2 + 8s + 25} + \frac{40s + 40}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 25)}.$$

Den ersten Summanden kennen wir im wesentlichen bereits aus dem letzten Abschnitt; beim zweiten hilft offensichtlich nur eine Partialbruchzerlegung: Wir setzen an

$$\begin{aligned} \frac{40s + 40}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 25)} &= \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 8s + 25} \\ &= \frac{(as + b)(s^2 + 8s + 25) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 25)} \\ &= \frac{(a + c)s^3 + (8a + b + d)s^2 + (25a + 8b + c)s + 25b + d}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 25)}, \end{aligned}$$

d.h. $a + c = 0$, $8a + b + d = 0$, $25a + 8b + c = 40$ und $25b + d = 40$.

Damit ist $c = -a$ und $d = 40 - 25b$; setzen wir das ein in die beiden mittleren Gleichungen, folgt

$$8a + b + 40 - 25b = 8a - 24b + 40 = 0 \quad \text{und} \quad 24a + 8b = 40.$$

Subtrahiert man dreimal die erste Gleichung von der zweiten, folgt, daß $80b = 160$ ist, also $b = 2$ und $a = 1$. Damit kennen wir auch $c = -1$ und $d = -10$ und

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s + 20}{s^2 + 8s + 25} + \frac{s + 2}{s^2 + 1} - \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 25} \\ &= \frac{s + 2}{s^2 + 1} + \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 25} \\ &= \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 3^2} + 2 \cdot \frac{3}{(s + 4)^2 + 3^2} \\ &= \mathcal{L}\{\cos t + 2 \sin t + e^{-4t}(\cos 3t + 2 \sin 3t)\}(s). \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Lösungsfunktion

$$y(t) = \cos t + 2 \sin t + e^{-4t} (\cos 3t + 2 \sin 3t).$$

Sie ist Summe aus einer gedämpften Schwingung, wie wir sie ohne die rechte Seite hätten, und einer reinen Schwingung der anregenden Frequenz, die sich langfristig durchsetzt. Im Vergleich zur rechten Seite hat sie jedoch sowohl eine andere Amplitude als auch eine andere Phase. Abbildung 21 zeigt, wieder mit besser zum Zeichnen geeigneten Parametern, eine solche Summe.

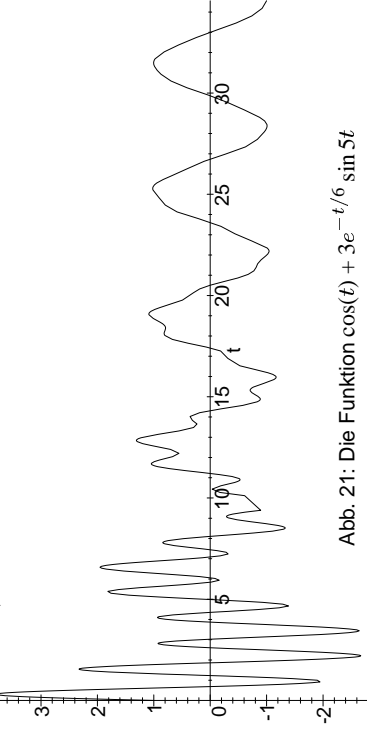


Abb. 21: Die Funktion $\cos(t) + 3e^{-t/6} \sin 5t$

Als zweites Beispiel betrachten wir

$$\dot{y}(t) + 8y(t) + 15y'(t) = 30 \cos t + 20 \sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = 2, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Hier führt die LAPLACE-Transformation auf

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - 2s - 1 + 8(sY(s) - 2) + 15Y(s) \\ = (s^2 + 8s + 15)Y(s) - 2s - 17 = \frac{30s + 20}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

oder

$$Y(s) = \frac{2s + 17}{s^2 + 8s + 15} + \frac{30s + 20}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 15)}.$$

Wieder ist für den zweiten Summanden eine Partialbruchzerlegung notwendig.

$$\frac{30s + 20}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 15)} = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{(s^2 + 8s + 15)}$$

$$= \frac{(as + b)(s^2 + 8s + 15) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 8s + 15)}$$

$$= (a + c)s^3 + (8a + b + d)s^2 + (15a + 8b + c)s + 15b + d.$$

Wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$a + c = 0, \quad 8a + b + d = 0, \quad 15a + 8b + c = 30 \quad \text{und} \quad 15b + d = 20$$

lösen. Die erste und die letzte Gleichung erlauben auch hier wieder, $c = -a$ und $d = 20 - 15b$ durch a und b auszudrücken; Einsetzen in die beiden mittleren Gleichungen führt auf

$$8a - 14b = -20 \quad \text{und} \quad 14a + 8b = 30,$$

was sich zu

$$4a - 7b = -10 \quad \text{und} \quad 7a + 4b = 15$$

kürzen läßt. Vier mal erste plus sieben mal zweite Gleichung ergibt $65a = 65$ oder $a = 1$, also ist $b = 2$, $c = -1$ und $d = -10$. Somit ist

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s + 17}{s^2 + 8s + 15} + \frac{s + 2}{s^2 + 1} - \frac{s + 10}{s^2 + 8s + 15} \\ &= \frac{s + 2}{s^2 + 1} + \frac{s + 7}{(s + 4)^2 - 1}. \end{aligned}$$

Auch hier ist für den zweiten Summanden eigentlich wieder eine Partialbruchzerlegung notwendig, allerdings läßt sie sich in diesem Falle auch umgehen: Wegen der Linearität der LAPLACE-Transformation ist nämlich

$$\mathcal{L}\{\cosh \lambda t\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - \lambda} + \frac{1}{s + \lambda}\right) = \frac{s}{s^2 - \lambda^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{\sinh \lambda t\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - \lambda} - \frac{1}{s + \lambda}\right) = \frac{\lambda}{s^2 - \lambda^2}.$$

Kombinieren wir dies mit der Regel, daß Multiplikation mit einer Exponentialfunktion das Argument verschiebt, erhalten wir über die Zerlegung

$$Y(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 1} + \frac{s + 4}{(s + 4)^2 - 1} + \frac{3}{(s + 4)^2 - 1}$$

als Funktion mit Laplace-Transformation $Y(s)$

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos t + 2 \sin t + e^{-4t} (\cosh t + 3 \sinh t) \\ &= \cos t + 2 \sin t + \frac{e^{-3t} + e^{-5t} + 3e^{-3t} - 3e^{-5t}}{2} \\ &= \cos t + 2 \sin t + 2e^{-3t} - e^{-5t}. \end{aligned}$$

Auch hier setzt sich also die anregende Schwingung durch.

Als letztes Beispiel betrachten wir

$$\ddot{y}(t) + 25y(t) = \cos 5t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

LAPLACE-Transformation führt auf

$$s^2 Y(s) - s + 25Y(s) = \frac{s}{s^2 + 25} \quad \text{oder} \quad Y(s) = \frac{s}{s^2 + 25} + \frac{s}{(s^2 + 25)^2}.$$

Der erste Summand ist einfach die LAPLACE-Transformierte von $\cos 5t$; der zweite ist uns bislang noch nicht begegnet.

Wenn wir daran denken, daß die Quotientenregel der Differentiation das Quadrat des Nenners der abgeleiteten Funktion im Nenner hat, liegt es nahe, mit der Ableitung der LAPLACE-Transformierten des Sinus zu vergleichen:

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{-2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2} = -2\omega \cdot \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}.$$

Wie wir aus Abschnitt b) wissen, ist die Ableitung der LAPLACE-Transformierten einer Funktion gleich der LAPLACE-Transformierten der $-t$ -fachen Funktion. In unserem Fall folgt

$$\mathcal{L}\{t \sin \omega t\}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

und speziell

$$\mathcal{L}\{t \sin 5t\}(s) = \frac{10s}{(s^2 + 25)^2}.$$

Somit ist hier die Lösung gleich

$$y(t) = \cos 5t + \frac{t}{10} \sin 5t.$$

Der zweite Term ist eine Schwingung mit linear ansteigender Amplitude; wie die obige Rechnung zeigt, kommt er daher, daß die Eigenfrequenz der linken Seite gleich der anregenden Frequenz auf der rechten Seite ist. Da unbegrenzt wachsende Amplituden nichts gutes bedeuten, redet man hier von der sogenannten *Resonanzkatastrophe*. Abbildung 22 zeigt ein Beispiel.

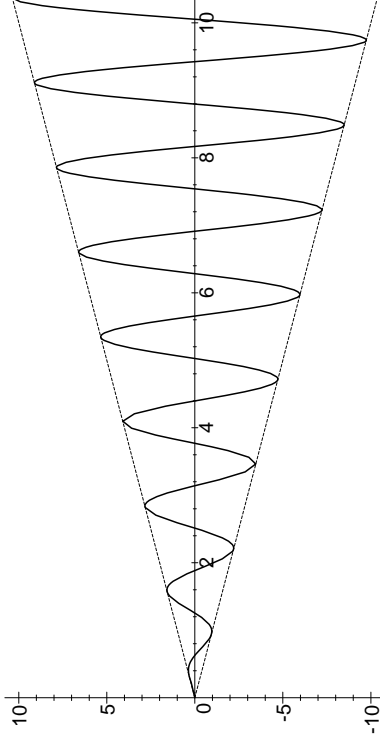


Abb. 22: Die Funktion $t \sin 5t$

Nach diesen Beispielen wollen wir auch das Anfangswertproblem dieses Abschnitts systematisch betrachten, allerdings sei die rechte Seite der Einfachheit halber als eine reine Kosinusfunktion der Form $A_0 \cos \omega_0 t$ angenommen. Wir betrachten somit das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho \dot{y}(t) + \sigma y(t) = c \cos \omega_0 t \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation führt auf

$$(s^2 + \rho s + \sigma) \mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s y_0 - y_1 - \rho y_0 = \frac{c s}{s^2 + \omega_0^2}$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{s y_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} + \frac{c s}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)}.$$

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation des ersten Summanden kennen wir: Das ist die Lösung des im vorigen Abschnitt betrachteten

Anfangswertproblems. Für den zweiten Summanden brauchen wir, wie im obigen Beispiel, eine Partialbruchzerlegung: Falls die beiden Faktoren des Nenners verschieden sind, können wir mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner führt auf die Polynomgleichung

$$\begin{aligned} cs &= (\alpha s + \beta)(s^2 + \rho s + \sigma) + (\gamma s + \delta)(s^2 + \omega_0^2) \\ &= (\alpha + \gamma)s^3 + (\beta + \alpha\rho + \delta)s^2 + (\beta\rho + \alpha\sigma + \gamma\omega_0^2)s + \beta\sigma + \delta\omega_0^2, \end{aligned}$$

also auf das lineare Gleichungssystem

$$\alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \rho\beta + \delta = 0, \quad \sigma\alpha + \rho\beta + \omega_0^2\gamma = c \quad \text{und} \quad \sigma\beta + \omega_0^2\delta = 0.$$

Aus der ersten und der letzten Gleichung erhalten wir die Beziehungen

$$\gamma = -\alpha \quad \text{und} \quad \delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta;$$

damit bleiben nur noch zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten α und β übrig:

$$\rho\alpha + \left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha + \rho\beta = c.$$

Falls ρ nicht verschwindet, führt die erste Gleichung zu

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma}{\omega_0^2} - 1}{\rho} \cdot \beta = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta,$$

und damit ist nach der zweiten Gleichung

$$\left(\frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} + \rho\right)\beta = c$$

oder

$$\beta = \frac{c}{\frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} + \rho} = \frac{c\rho\omega_0^2}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}.$$

Damit sind auch α, γ und δ bekannt:

$$\alpha = -\gamma = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta = \frac{c(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}$$

und

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta = \frac{-c\rho\sigma}{(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}.$$

Bleibt noch der Fall $\rho = 0$ zu behandeln. Dann bleibt vom Gleichungssystem für α und β nur noch

$$\left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha = c$$

übrig. Ist $\sigma \neq \omega_0^2$, folgt, daß

$$\beta = \delta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = -\gamma = \frac{c}{\sigma - \omega_0^2}$$

sein muß, was offensichtlich genau die obigen Formeln im Spezialfall $\rho = 0$ sind.

Für $\sigma = \omega_0^2$ wird die zweite Gleichung zu $0 \cdot \alpha = c \neq 0$ und damit unlösbar; das ist nicht weiter verwunderlich, denn das entspricht dem Fall, daß im obigen Ansatz zur Partialbruchzerlegung die beiden Nenner gleich sind, was natürlich nicht funktionieren kann.

In allen anderen Fällen kennen wir nun reelle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}$$

ist. Vom ersten Summanden wissen wir, daß

$$\mathcal{L}\left\{\alpha \cos \omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0} \sin \omega_0 t\right\} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2}$$

ist; den zweiten Summanden müssen wir wie oben durch quadratische Ergänzung

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

umformen, und genau wie dort hängt es vom Vorzeichen von $\sigma - \frac{\rho^2}{4}$ ab, ob wir gedämpfte Schwingungen mit Frequenz $\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$ oder

abfallende Exponentialfunktionen erhalten. In jedem Fall ist die Lösung Linearkombination einer reinen Schwingung mit der erregenden Frequenz ω_0 , im elektrischen Schwingkreis also der Frequenz der Wechselstromquelle, und einer Funktion, die für $t \rightarrow \infty$ gegen null geht. Langfristig setzt sich, wie in Abbildung 21 zeigt die erregende Frequenz durch.

Bleibt noch der zurückgestellte Fall, daß beide Nenner gleich sind, d.h. $\rho = 0$ und $\sigma = \omega_0^2$ ist. Dann müssen wir, wie im letzten der konkreten Beispiele dieses Abschnitts, eine Funktion finden, deren LAPLACE-Transformierte gleich

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$$

ist. Dort haben wir gesehen, daß

$$\mathcal{L}\{t \sin \omega t\}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

ist, also folgt

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{c}{2\omega_0} \cdot t \sin \omega_0 t\right\}(s),$$

und wir haben auch diesen Fall gelöst: Er führt auf die bereits im letzten der konkreten Beispiele aufgetretene *Resonanzkatastrophe*: Die erregende Schwingung hat dieselbe Frequenz wie der Schwingkreis, und das führt, bei Abwesenheit einer jeglichen Dämpfung, zu einer katastrophalen Aufschaukelung. Auch bei Dämpfung ist Resonanz zu beobachten: Die oben berechneten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, haben allesamt den Nenner

$$(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2 \omega_0^2,$$

werden also umso größer, je näher σ bei ω_0^2 liegt, jedoch verhindert der Dämpfungsterm ρ , daß der Nenner je wirklich verschwindet. Bei kleinem ρ kann die Resonanz bei und um $\sigma = \omega_0^2$ allerdings in der Praxis trotzdem problematisch und in Extremfällen (z.B. bei Brücken) sogar katastrophal sein.

Mit den Formeln, die schon haben, könnten wir nun leicht die vollständigen Lösungen für jeden der behandelten Fälle hinschreiben, aber die

bisherige Diskussion zeigt, daß das doch zu sehr langen Formeln führen würde. Die LAPLACE-Transformation ist zwar sehr gut geeignet, um die Lösung eines konkreten Anfangswertproblems hinzuschreiben – dann sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ keine komplizierten Ausdrücke, sondern einfach reelle Zahlen –, aber für abstraktere Überlegungen führt sie zu eher unübersichtlichen Ergebnissen. Wir werden daher im nächsten Kapitel alternative Methoden kennenlernen, die mehr über die Struktur der Lösungen von Differentialgleichungen aussagen.

§7: Die Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum

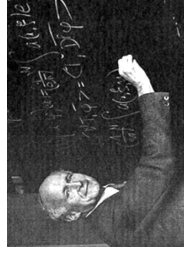
a) Der Schwartz-Raum der stark abfallenden Funktionen

Wie die Beispiele aus §5 zeigen, ist die Existenz von FOURIER- und LAPLACE-Integralen alles andere als sicher. In diesem Abschnitt wollen wir eine Klasse von Funktionen betrachten, für die es garantiert keine Probleme gibt, und wir wollen für diese Funktionen weitere Eigenschaften von FOURIER- und LAPLACE-Transformation herleiten. Im nächsten Paragraphen werden wir diese Ergebnisse verallgemeinern auf die Funktionen, die uns wirklich interessieren.

Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend*, wenn sie beliebig oft stetig differenzierbar ist und die Funktionen

$$t \mapsto |t^r f^{(k)}(t)|$$

für alle $k, r \geq 0$ beschränkt sind. Die Menge aller stark abfallender Funktionen bezeichnen wir als SCHWARTZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.



LAURENT SCHWARTZ (1915–2002) wurde in Paris geboren, studierte zunächst an der dortigen Ecole Normale Supérieure, dann an der Universität Straßburg. 1945 wurde er Professor in Nancy und entwickelte dort die mathematische Theorie der bislang nur von Physikern wie DIRAC und HEAVISIDE betrachteten Distributionen. Für diese Arbeiten wurde er 1950 mit der Fields

Medal ausgezeichnet, dem bedeutendsten Preis in der Mathematik. Von 1953 bis zu seiner Emeritierung 1983 lehrte er in Paris, bis 1980 an der Ecole Polytechnique, dann an der Universität Paris VII.