

Wolfgang K. Seiler

# Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim  
im Wintersemester 2006/2007

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehungsweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich sicherlich nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail ([seiler@math.uni-mannheim.de](mailto:seiler@math.uni-mannheim.de)) mit, oder informieren Sie Ihren Tutor. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Berichtigungen und Verbesserungen ausgeben.

an, fließt ein Strom der Amplitude

$$I_0 = U_0 / \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

auch hier haben wir also wieder einen von der Frequenz abhängigen Widerstand.

Wechselstromkreise haben zwar mehr mit Technischer Informatik zu tun als Geigen und Trompeten; sie gehören aber doch eher zum Arbeitsgebiet eines Elektroinstallateurs als zu dem eines Informatikers. Natürlich fließen auch in einem Computer Ströme, aber mit reinen Wechselströmen kann man fast genauso wenig anfangen wie mit einem Computer, in dem überall ein konstanter Gleichstrom fließt: Elektronische Informationsverarbeitung lebt von schnell und unregelmäßig variierenden Strömen. Diese fließen allerdings durch genau die Schaltelemente, von denen wir gerade gesehen haben, daß ihr Verhalten stark von der Frequenz abhängt.

Um auch solche Situationen berechenbar zu machen, müssen wir einen beliebigen Stromverlauf in eine *Summe reiner Wechselströme* zerlegen, so wie man auch den Ton eines Musikinstruments in seine Grundschiwingung und die Oberschwingungen zerlegen kann. Wir werden in diesem Kapitel als erstes sehen, daß man jede (halbwegs vernünftige) *periodische* Funktion beliebig genau durch Summen reiner Schwingungen annähern kann; die entsprechende Konstruktion bezeichnet man als *harmonische Analyse*. Sie gestattet es, auch für ein komplizierteres Signal dessen Verhalten in einer (linearen) Schaltung zu berechnen: Wir müssen einfach jede der reinen Schwingungen, aus denen es zusammengesetzt ist, für sich betrachten und die Ergebnisse aufsummieren.

Für nichtperiodische Funktionen wird sich zeigen, daß hier zwar keine Zerlegung in diskrete Grund- und Oberschwingungen mehr möglich ist, daß es aber ein *kontinuierliches Frequenzspektrum* gibt, mit dem man genauso arbeiten kann, wenn man die Beiträge der einzelnen Frequenzen nicht mehr summiert, sondern aufintegriert.

Bevor wir uns mit diesen Zerlegungen beschäftigen, brauchen wir zunächst einige Vorbereitungen über komplexe Funktionen.

## Kapitel 3 Harmonische Analyse und Integraltransformationen

Selbst der unmusikalischste Zuhörer erkennt sofort, ob ein Ton, beispielsweise zur Note „g“, auf einer Geige oder auf einer Trompete gespielt wurde – obwohl es sich in beiden Fällen um dieselbe Note mit derselben Frequenz 192 Hertz handelt. Der Grund dafür dürfte allgemein bekannt sein: Die verschiedenen Musikinstrumente produzieren zum selben Grundton verschiedene Obertöne. Anhand der Verhältnisse zwischen den Stärken dieser Obertöne (und auch deren zeitlicher Variation) identifiziert unser Ohr die uns vertrauten Instrumente – auch wenn uns die Verhältnisse selbst quantitativ nicht bewußt sind. Umgekehrt werden bei der Synthese von Tönen etwa durch eine Soundkarte reine Schwingungen erzeugt und kombiniert.

Genau wie unser Ohr reagieren auch elektrische Schaltungen in unterschiedlicher Weise auf verschiedene Frequenzen: Legt man beispielsweise an eine Spule mit OHMSchem Widerstand  $R$  und Induktivität  $L$  eine Gleichspannung  $U_0$  an, so fließt ein Strom der Stärke  $I_0$ , für den nach dem OHMSchen Gesetz gilt:  $U_0 = RI_0$ . Ersetzt man aber die Gleichspannung durch eine Wechselspannung der Kreisfrequenz  $\omega$ , so gilt für die Amplitude  $I_0$  des dann fließenden Wechselstroms  $U_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_0$ , der Widerstand hängt also ab von der Frequenz.

Ersetzt man die Spule durch einen Kondensator mit Kapazität  $C$  und Widerstand (der Zuleitungen)  $R$ , so fließt beim Anlegen einer Gleichspannung natürlich überhaupt kein Strom: Der Kondensator läßt sich einfach auf. Legt man aber eine Wechselspannung der Kreisfrequenz  $\omega$

## §1: Funktionen einer komplexen Veränderlichen

### a) Wozu komplexe Zahlen

Funktionen einer Veränderlichen werden in der Technik typischerweise dazu eingesetzt, um die Zeitabhängigkeit physikalischer Größen auszudrücken: So kann beispielsweise ein Wechselstrom der Amplitude  $I_0$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  durch die Gleichung  $I(t) = I_0 \sin \omega t$  beschrieben werden. Schaut man allerdings in Lehrbücher der Elektrotechnik, so findet man dort oft stattdessen die Formel

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}.$$

(Tatsächlich schreiben Elektrotechniker natürlich  $e^{i\omega t}$ , denn im Gegensatz zu Mathematikern und Physikern bezeichnen sie  $\sqrt{-1}$  nicht mit  $i$ , sondern mit  $j$ .)

Auf den ersten Blick erscheint dies unsinnig: Was soll man sich beispielsweise unter einem Strom von  $4 - 2i$  Milliampère vorstellen? Einen solchen Strom gibt es natürlich nicht. Tatsächlich ist die obige Gleichung so zu interpretieren, daß ihr Imaginärteil den tatsächlichen Strom beschreibt, während der Realteil ignoriert wird. Auf Grund der EULERSchen Formeln

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad \cos \omega t = \Re e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad \sin \omega t = \Im e^{i\omega t}$$

beschreibt also auch dieser Formalismus einen tatsächlich fließenden Strom  $I_0 \sin \omega t$ . (Einige Bücher verwenden die Konvention, daß nur der Realteil zählt und der Imaginärteil ignoriert wird; in diesem Fall würde  $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$  den Strom  $I_0 \cos \omega t$  beschreiben.)

Der Sinn dieser Vorgehensweise liegt in mindestens zwei rechnerischen Vorteilen: Zum ersten sind Additionsregeln für trigonometrische Funktionen, vor allem wenn man sie mehrfach anwenden muß, ziemlich unangenehm, wohingegen wir für die Exponentialfunktion, egal ob mit reellen oder komplexen Argumenten, stets mit der einfachen Regel  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$  rechnen kann.

Der zweite Vorteil wird offensichtlich, wenn wir Wechselstromnetzwerke betrachten, die nicht nur Widerstände, sondern auch Spulen und

Kondensatoren enthalten: Geht ein variabler Strom durch eine Spule der Induktivität  $L$ , so wird die Spannung  $U(t) = LI'(t)$  induziert. In reeller Beschreibung ist also bei einem Wechselstrom  $I(t) = I_0 \sin \omega t$

$$U(t) = LI_0 \omega \cos \omega t.$$

Beim komplexen Ansatz mit  $I(t) = I_0 e^{i\omega t} = I_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$  können wir dagegen einfach mit  $i\omega L$  multiplizieren, denn

$$i\omega L \cdot I_0 e^{i\omega t} = i\omega L \cdot I_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) = LI_0 \omega (-\sin \omega t + i \cos \omega t)$$

hat als Imaginärteil genau die gerade berechnete Funktion  $U(t)$ . Während wir im Reellen also stets auch die Zeitabhängigkeit der Stromstärke im Auge behalten müssen, reicht es bei komplexer Darstellung, einfach die (komplexen) „Amplituden“ zu betrachten.

Ähnlich ist es bei Kondensatoren: Hier fließt bei Kapazität  $C$  und Ladung  $Q(t)$  des Kondensators der Strom  $I(t) = \dot{Q}(t)$ . Falls dies ein reiner Wechselstrom ist, können wir ihn – in reeller Form – als  $I(t) = I_0 \sin \omega t$  schreiben, und die Spannung zwischen den beiden Platten des Kondensators ist

$$U(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{1}{C} \int I_0 \sin \omega t dt = -\frac{I_0 \cos \omega t}{\omega C},$$

der Imaginärteil von

$$\frac{1}{i\omega C} \cdot I_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega C} \cdot I_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \frac{I_0}{\omega C} \cdot (\sin \omega t - i \cos \omega t).$$

Auch hier müssen wir also bei komplexer Darstellung nur mit der festen Zahl  $\frac{1}{i\omega C}$  multiplizieren statt wie im Reellen zu integrieren.

Rein formal kann man somit im komplexen Kalkül, der sogenannten *komplexen Zeigerrechnung*, Induktivitäten und Kapazitäten als rein imaginäre „Widerstände“ hinschreiben und mit diesen genauso rechnen, wie man es bei Gleichstromnetzen mit nur OHMSchen Widerständen gewohnt ist. Zusammen mit den auch in Wechselstromnetzen allgegenwärtigen OHMSchen Widerständen, für die das klassische OHMSche Gesetz gilt, hat man somit insgesamt formal einen komplexen Widerstand, die sogenannte *Impedanz*. Sein Betrag beschreibt den auf die Amplituden des Wechselstroms bezogenen Widerstand, sein Argument die Phasenverschiebung.

Die KIRCHHOFFSchen Gesetze gelten auch für die komplexe Beschreibung von Strömen und Spannungen, insbesondere gelten für die Parallel- und Serienschaltung von Impedanzen genau die Regeln, die man von den OHMSchen Widerständen her gewohnt ist, und man kann Ströme und Spannungen in Wechselstromnetzwerken mit nur passiven Bauelementen genauso berechnen wie bei Gleichstromnetzwerken, die nur Widerstände enthalten. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man nun lineare Gleichungssysteme mit *komplexen* Koeffizienten lösen muß. Bei einer rein reellen Beschreibung müßte man statt dessen Differentialgleichungssysteme betrachten, was – wie wir im nächsten Kapitel sehen werden – erheblich aufwendiger ist. (Bei komplizierteren Schaltungen, die auch aktive Bauteile enthalten, gibt es dazu allerdings keine Alternative mehr.)

Auch die eingangs erwähnten Formeln für die Spannungsamplituden in einem  $RL$ - bzw.  $RC$ -Kreis lassen sich durch komplexe Zeigerrechnung leicht erklären: Im  $RL$ -Kreis ist die Impedanz gleich  $R + i\omega L$ ; bei einem Wechselstrom  $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$  ist die Spannung also in komplexer Darstellung  $U(t) = (R + i\omega L) \cdot I_0 e^{i\omega t}$ . Da  $e^{ix}$  für reelles  $x$  stets den Betrag eins hat, ist der Betrag von  $U(t)$  gleich dem der komplexen Zahl  $(R + i\omega L)I_0$ , also  $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_0$ .

Warum ist dieser Betrag gleich der Amplitude des Imaginärteils? Für die Funktion  $Ae^{i\omega t}$  mit komplexem  $A$  (hier ist  $A = (R + i\omega L) \cdot I_0$ ), können wir  $A$  auch in Polarkoordinaten schreiben als  $A = |A| \cdot e^{i\psi_0}$ . Dann ist der Imaginärteil hat also in der Tat Amplitude  $|A|$ . Bei reeller Rechnung kämen wir zwar zum selben Ergebnis, aber wir müßten in diesem Fall die Amplitude der Funktion

$$\omega LI_0 \cos \omega t + RI_0 \sin \omega t$$

berechnen. Dazu müßten wir diesen Ausdruck auf die Form

$$A_0 \sin(\omega t + \psi) = A_0 \sin \psi \cos \omega t + A_0 \cos \psi \sin \omega t$$

bringen, d.h. wir müßten eine Phasenverschiebung  $\psi$  und eine Amplitude  $A_0$  finden, so daß

$$\omega LI_0 = A_0 \sin \psi \quad \text{und} \quad RI_0 = A_0 \cos \psi$$

ist. Wegen der Beziehung  $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$  ist natürlich auch hier

$$A_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_0,$$

die Rechnung ist aber erheblich aufwendiger.

Auf Grund dieser vielen Vorteile hat sich die komplexe Zeigerrechnung allgemein durchgesetzt; ihre einfache Handhabbarkeit wiegt den Nachteil des zunächst etwas unanschaulichen Ansatzes mehr als auf, und im übrigen gewöhnt man sich nach etwas praktischer Übung auch sehr schnell daran.

Auch in der Wellenoptik erweist es sich oft als große Vereinfachung und Arbeitersparnis, wenn man mit komplexen Schwingungen rechnet. Wir werden daher in diesem Kapitel nicht nur reelle, sondern auch komplexe Funktionen betrachten. Da wir viel differenzieren und integrieren müssen, wollen wir uns zunächst überlegen, was diese Operationen im Komplexen bedeuten und welche Gesetze dafür gelten.

Wer immer noch Probleme darin sieht, mit komplexen Größen zu rechnen, die keinerlei physikalische Realität haben, sollte sich daran erinnern, daß auch die reellen Zahlen eine mathematische Konstruktion ohne Entsprechung in der Realität sind. Die Erfahrung in Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften haben gezeigt, daß die reellen Zahlen dort außerordentlich nützlich sein können, einen logischen Grund dafür gibt es aber nicht. Genauso verhält es sich mit vielen anderen mathematischen Theorien, insbesondere auch hier beim komplexen Formalismus zur Beschreibung elektrischer Größen.

Der Physik-Nobelpreisträger EUGENE WIGNER (1902–1995) bezeichnete dieses Phänomen im Titel einer seiner Arbeiten als „The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences“ (*Communications in pure and applied mathematics* **13** (1960), 1–14; *zahlreiche Nachdrucke im WWW*). Wirklich zum Tragen kommt diese schwer erklärbare Nützlichkeit der Mathematik allerdings nur in den Händen eines Anwenders, der sowohl ihre Möglichkeiten als auch ihre Grenzen für seinen jeweiligen Problembereich kennt.

Der Hauptinhalt des folgenden Paragraphen ist ein Steilkurs über Anwendungen des sogenannten Residuenkalküls auf reelle Integrale.

Ein Integral wie  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$  läßt sich auch mit elementaren Methoden einfach berechnen: Wie man entweder weiß oder in einer Formelsammlung nachschlägt, hat der Integrand den Arcustangens als Stammfunktion, und da der Tangens im Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \pi/2]$  von  $-\infty$  nach  $\infty$  ansteigt, ist der Wert des uneigentlichen Integrals  $\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$ .

Auf ähnliche Weise könnte man zumindest im Prinzip alle Integrale der Form  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$  ausrechnen, bei denen der Integrand eine *rationale Funktion* (d.h. ein Quotient zweier Polynome) ist – vorausgesetzt, das uneigentliche Integral konvergiert und man kann den Nenner in höchstens quadratische Faktoren zerlegen. Dann kann man  $R(x)$  als Summe von Partialbrüchen schreiben (s. [HMI1], Kap. 2, §3h4), und für jeden dieser Partialbrüche läßt sich eine Stammfunktion angeben.

Die Konvergenz des Integrals ist ein Problem, um das kein Weg herumführt; was nicht existiert, kann man auch nicht ausrechnen.

Das zweite Problem, die Zerlegung des Nenners in höchstens quadratische Funktionen, ist prinzipiell lösbar, kann allerdings sehr schwierig sein: Man denke nur etwa an Nenner wie  $x^7 + x + 2$  oder ähnliches. Zum Glück kennt die Computeralgebra eine Reihe von Algorithmen, mit denen man eine Stammfunktion von  $R(x)$  bestimmen kann, *ohne* solche Faktoren zu kennen; die ersten solchen Algorithmen stammen bereits aus dem neunzehnten Jahrhundert, lange bevor es die ersten Computer gab. Selbst diese Algorithmen erfordern jedoch algebraische Techniken, für die wir in dieser Vorlesung keine Zeit haben.

Zum Glück können wir aber Integrale wie  $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$  oft auch berechnen, *ohne* die Stammfunktion von  $R(x)$  zu bestimmen. Voraussetzung dazu ist, daß das Integral konvergiert, daß wir die Nullstellen des Nenners kennen, und daß keine dieser Nullstellen reell ist. Integrale, bei denen diese drei Voraussetzungen erfüllt sind, kommen in der Elektrotechnik häufig vor; es lohnt sich also, diese Methode kennenzulernen.

Sie beruht darauf, daß Differentiation und Integration im Komplexen deutlich andere Eigenschaften haben als im Reellen.

## b) Die Ableitung einer komplexen Funktion

**Definition:** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  auf der offenen Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$  heißt *komplex differenzierbar* im Punkt  $z \in D$ , wenn der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert und stetig ist.  $f$  heißt *komplex differenzierbar* in  $D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $z \in D$  komplex differenzierbar ist.

Der große Unterschied zum reellen Differentialquotienten liegt darin, daß  $h$  hier eine *komplexe* Zahl ist, die sich nicht nur von rechts und links, sondern aus allen Richtungen und auf jedem beliebigen Weg (für den  $z+h$  noch in  $D$  liegt) dem Nullpunkt nähern kann. Um zu sehen, was das bedeutet, betrachten wir zunächst die beiden einfachsten Fälle, daß sich  $h$  ganz auf der reellen bzw. der imaginären Achse bewegt.

Konkret sei  $z = x + iy$  und

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit zwei Funktionen  $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ . (Hier wird  $D$  also als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  aufgefaßt.)

Für *reelles*  $h$  ist dann

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h};$$

der Grenzwert für  $h$  gegen Null, so er existiert, ist damit gleich

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

Für rein *imaginäres*  $h = ik$  ist entsprechend

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + i \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{ik} \\ &= \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{k} - i \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k}; \end{aligned}$$

der Grenzwert für  $h$  (oder  $k$ ) gegen Null ist also, so er existiert, gleich

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Falls  $f$  komplex differenzierbar ist, müssen beide Grenzwerte übereinstimmen, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$$

oder kurz  $u_x = v_y$  und  $v_x = -u_y$ .

Diese Gleichungen heißen CAUCHY-RIEMANNSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN; sie sind eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion komplex differenzierbar ist.

Die Existenz einer Ableitung ist somit im Komplexen eine sehr viel einschneidendere Bedingung als im Reellen. Dafür liefert sie aber auch deutlich mehr!

Erinnern wir uns an die Analysis I:

- Wenn eine reelle Funktion differenzierbar ist, muß sie nicht stetig differenzierbar sein: Ein Gegenbeispiel ist etwa die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Für  $x \neq 0$  ist ihre Ableitung nach Produkt- und Kettenregel gleich  $\sin \frac{1}{x} + 2x \cos \frac{1}{x}$ ; für  $x = 0$  ist

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0,$$

so daß  $f'(x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$  existiert. Allerdings ist  $f'(x)$  an der Stelle  $x = 0$  nicht stetig, denn da  $\sin \frac{1}{x}$  in jeder Umgebung der Null jeden Wert zwischen  $-1$  und  $1$  annimmt, existiert  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  nicht, ist also insbesondere nicht gleich  $f'(0)$ , wie das bei einer stetigen Funktion der Fall sein müßte.

- Wenn eine Funktion  $n$ -mal stetig differenzierbar ist, muß sie nicht  $(n+1)$ -mal differenzierbar sein: Die Funktion

$$f_n(x) = x^n |x| = \begin{cases} x^{n+1} & \text{für } x \geq 0 \\ -x^{n+1} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

ist für  $n = 0$  die Betragsfunktion und somit im Nullpunkt nicht differenzierbar. Für  $n \geq 1$  ist  $f_n$  stetig differenzierbar mit Ableitung  $f'_n(x) = (n+1)f_{n-1}(x)$ , und damit ist klar, daß  $f_n$  zwar  $n$ -mal, nicht aber  $(n+1)$ -mal differenzierbar ist.

- Wenn eine Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, heißt das noch immer nicht, daß sie auch nur lokal durch ihre TAYLOR-Reihe dargestellt wird. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

etwa ist beliebig oft stetig differenzierbar, und alle Ableitungen verschwinden bei  $x = 0$ , denn  $x^{-1/x^2}$  geht schneller gegen null als eine rationale Funktion gegen unendlich gehen kann. Damit stellt die TAYLOR-Reihe um  $x = 0$  die Nullfunktion dar, nicht aber  $f(x)$ .

Im Komplexen kann all dies nicht passieren: Von den drei betrachteten Beispielfunktionen sind die erste und die dritte im Komplexen nicht einmal stetig im Nullpunkt, denn wenn man rein imaginäre Argumente einsetzt geht ihr Betrag gegen unendlich, und die Funktionen  $f_n$  erfüllen für kein  $z \in \mathbb{C}$  die CAUCHY-RIEMANNSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. Allgemein gilt:

**Satz:** Für eine offene Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$  und eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- $f$  erfüllt die CAUCHY-RIEMANNSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN für alle  $z \in D$ .
- $f$  ist in jedem Punkt  $z \in D$  differenzierbar.
- $f$  ist in jedem Punkt  $z \in D$  stetig differenzierbar.
- $f$  ist in jedem Punkt  $z \in D$  beliebig oft stetig differenzierbar.
- $f$  hat zu jedem Punkt  $z \in D$  eine Umgebung, in der es durch seine TAYLOR-Reihe um  $z$  dargestellt wird.

Die Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen, bezeichnet man als *holomorph*. Um nachzuweisen, daß eine Funktion holomorph ist, genügt es offensichtlich, *eine* der fünf Bedingungen a) bis e) nachzuweisen; die anderen sind dann automatisch erfüllt.

Der *Beweis* dieses Satzes steht (meist verteilt auf verschiedene Paragraphen) in jedem Lehrbuch der Funktionentheorie; abgesehen von der Implikation  $b) \Rightarrow c)$  ist er auch im Skriptum von 2005 zu finden. Der Schritt von  $a)$  nach  $b)$  ist eine einfache Folgerung aus der Matrixdarstellung der komplexen Zahlen (s. [HMI], Kap. I, §3c). Für die restlichen Schritte auf dem Weg von  $b)$  nach  $e)$  werden komplexe Integrale benötigt.

### c) Integration im Komplexen

Am einfachsten sind komplexe Integrale zu verstehen, wenn eine komplexe Funktion über ein reelles Intervall integriert werden soll: Wir schreiben  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  als  $f(z) = u(z) + iv(z)$  mit Funktionen  $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$  und definieren dann für ein Intervall  $[a, b] \subset D$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Rechts stehen, da  $t$  nur über  $[a, b]$  variiert, reinreelle Integrale, von denen wir wissen, was sie bedeuten; damit ist auch die linke Seite definiert.

Falls der Integrand  $f(z)$  eine Stammfunktion hat, d.h. wenn es eine holomorphe Funktion  $F(z)$  gibt, deren Ableitung  $f(z)$  ist, gilt genau wie im Reellen

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a),$$

denn natürlich ist die Ableitung des Realteils von  $F(z)$  der Realteil von  $f(z)$  und entsprechend auch für den Imaginärteil.

Man rechnet leicht nach, daß alle Potenzfunktionen  $f(z) = z^n$  die CAUCHY-RIEMANNSSCHEN Differentialgleichungen erfüllen und somit holomorph sind mit der üblichen Ableitung  $f'(z) = nz^{n-1}$ . Da Ableiten natürlich auch im Komplexen eine lineare Operation ist, folgt damit, daß alle Polynome holomorph sind und wie gewohnt abgeleitet werden können.

Für die Exponentialfunktion  $f(z) = e^{\lambda z}$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  zeigt eine kurze Rechnung mit der EULERSCHEN Formel

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

daß  $f'(z) = \lambda e^{\lambda z}$  ist, wie vom Reellen her gewohnt. Auf Grund der EULERSCHEN Formeln

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

die wir (auch) im Komplexen als *Definition* von Sinus und Kosinus betrachten können, haben damit auch die trigonometrischen Funktionen ihre gewohnten Ableitungen, und natürlich gelten auch Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel, deren Beweise wörtlich aus der Analysis I übernommen werden können – nur daß der in der Ableitungsdefinition gegen null gehende Parameter jetzt komplex statt reell ist.

Für alle Funktionen, die aus Polynomen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen zusammengesetzt sind, können wir somit Ableitungen nach genau denselben Formeln wie im Reellen berechnen, und damit können wir natürlich auch Stammfunktionen, da wo es möglich ist, mittels der gewohnten Tricks verschaffen.

Dies sind auch die einzigen komplexen Integrale die wir für den Rest dieses Semesters wirklich brauchen; lediglich für den Rest dieses Paragraphen brauchen wir, um die Idee hinter dem Residuenkalkül zur Berechnung reeller Integrale zu verstehen, auch allgemeinere komplexe Integrale.

Genau wie im letzten Semester bei den Kurvenintegralen haben wir auch jetzt bei den komplexen Integralen das Problem, daß es zwischen zwei Punkten  $a, b$  nicht mehr nur wie im Reellen nur einen Weg gibt: In der komplexen Zahlenebene gibt es viele Kurven, die in einem vorgegebenen Punkt beginnen und in einem anderen enden, und wie wir bei den reellen Kurvenintegralen gesehen haben, führen verschiedene Integrationswege im allgemeinen zu verschiedenen Werten des Integrals.

Glücklicherweise ist die Situation im Komplexen sehr viel überschaubarer als bei reellen Kurvenintegralen: Für auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Integranden hängt das Integral nicht vom Weg ab, sondern nur von dessen Anfangs- und Endpunkt.

Genauer gilt folgende Aussage:

**Cauchyscher Integralsatz:**  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  sei eine holomorphe Funktion, und die geschlossene Kurve  $\gamma$  sei die Randkurve einer offenen Teilmenge  $G \subset D$ , deren Abschluß  $\bar{G}$  ganz in  $D$  liege. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

#### d) Der Residuensatz

Der CAUCHYSche Integralsatz nützt uns nichts für rationale Funktionen als Integranden, denn die sind ja (gekürzte) Dargestellung vorausgesetzt) bei den Nullstellen des Nenners nicht einmal definiert, geschweige denn holomorph. Allerdings handelt es sich hier um relativ harmlose Definitionenlücken, denn es sind lauter isolierte Punkte (die Nullstellen des Nenners), und wenn wir für so eine Nullstelle  $z_0$  die Funktion mit  $(z - z_0)^n$  multiplizieren, wobei  $n$  die Nullstellenordnung ist, wird zumindest das Produkt im Punkt  $z_0$  wohldefiniert. Funktionen, bei denen nichts schlimmeres passiert, bezeichnet man als *meromorph*:

**Definition:** Eine Funktion  $f$  auf einer offenen Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{C}$  heißt *meromorph*, wenn gilt:

1. Es gibt eine Teilmenge  $M \subseteq D$  ohne Häufungspunkte derart, daß  $f$  auf  $D \setminus M$  durch eine holomorphe Funktion  $D \setminus M \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben ist.
2. Zu jedem Punkt  $w \in M$  gibt es eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , so daß  $g(z) = (z - w)^n f(z)$  in einer Umgebung von  $w$  holomorph ist.

Für jeden Punkt  $w \in M$  gibt es ein kleinstes  $n \in \mathbb{N}_0$ , so daß  $(z - w)^n g(z)$  in einer Umgebung von  $w$  holomorph ist. Im Falle  $n = 0$  ist  $f$  selbst dort holomorph und wir können  $w$  aus  $M$  herausnehmen; andernfalls bezeichnen wir  $w$  als eine *Polstelle* von  $f$  und  $n$  als deren *Ordnung*. Bei einer rationalen Funktion, die als gekürzter Quotient zweier Polynome dargestellt ist, stimmt sie offensichtlich mit der Nullstellenordnung des Nennerpolynoms in  $w$  überein.

In den Punkten, die nicht in  $M$  liegen, ist eine meromorphe Funktion sogar holomorph, kann also um jeden Punkt durch eine TAYLOR-Reihe

dargestellt werden. In einer Polstelle  $z_0 \in M$  gilt das natürlich nicht, aber es gibt nach Definition ein  $n \in \mathbb{N}$ , so daß  $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$  um  $z = z_0$  holomorph ist und somit in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden kann:

$$g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Dividiert man dies durch  $(z - z_0)^n$ , so erhält man für eine Umgebung von  $z_0$  mit *Ausnahme des Punktes*  $z = z_0$  selbst die Reihe

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} = \frac{b_0}{(z - z_0)^n} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{b_{n-1}}{z - z_0} + b_n + b_{n+1}(z - z_0) + b_{n+2}(z - z_0)^2 + \dots,$$

was wir auch in der Form

$$f(z) = a_{-n}(z - z_0)^{-n} + a_{-(n-1)}(z - z_0)^{-(n-1)} + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad \text{mit} \quad a_j = b_{j-n}$$

schreiben können. Diese Darstellung heißt die LAURENT-Reihe von  $f$  um  $z_0$ .

PIERRE ALPHONSE LAURENT (1813–1854) war Kommandant eines Ingenieurkorps der französischen Armee und leitete unter anderem den Ausbau des Hafens von Le Havre. Seine Arbeit über die LAURENT-Reihen reichte er etwas zu spät für den großen Preis der Akademie von 1842 ein, so daß sie trotz CAUCHYS Fürsprache nicht berücksichtigt wurde. Ansonsten schrieb er anscheinend nur noch zwei weitere Arbeiten, die erst von seiner Witwe bei der Akademie eingereicht wurden. Die eine erschien 1863, die andere nie.

Eine LAURENT-Reihe unterscheidet sich somit nur dadurch von einer TAYLOR-Reihe, daß sie auch endlich viele Summanden mit negativen Exponenten haben darf. Diese treten genau dann auf, wenn die Funktion  $f$  im Punkt  $z_0$  einen Pol hat. Wählt man  $n$  minimal, ist also  $a_{-n} \neq 0$ , so handelt es sich dabei offenbar genau um die Polordnung: Multipliziert man nämlich die LAURENT-Reihe mit  $(z - z_0)^n$ , so verschwinden alle negativen Potenzen; sie wird also zur TAYLOR-Reihe einer holomorphen Funktion. Multipliziert man dagegen mit einer kleineren Potenz von  $(z - z_0)$ , so steht nach  $a_{-n}$  weiterhin eine negative Potenz, das Produkt wird also für  $z = z_0$  weiterhin unendlich.



Die Summe

$$H(z) = \sum_{k=-n}^{-1} a_k (z - z_0)^k = \sum_{\ell=1}^n \frac{a_{-\ell}}{(z - z_0)^\ell}$$

der Terme mit negativen Potenzen wird als *Hauptteil* der meromorphen Funktion  $f(z)$  im Punkt  $z_0$  bezeichnet; offensichtlich ist die Differenz  $f(z) - H(z)$  in einer Umgebung von  $z_0$  holomorph, da sie dort durch eine TAYLOR-Reihe dargestellt werden kann.

Angenommen, wir wollen eine meromorphe Funktion  $f$  integrieren über die Randkurve  $\gamma$  eines Gebiets  $G$ . Wir wollen annehmen, daß  $f$  auf einer offenen Menge  $D \subseteq \mathbb{C}$  definiert sei, die  $G$  und  $\gamma$  enthält, und daß  $G$  beschränkt sei. Außerdem liege keine Polstelle von  $f$  auf der Randkurve  $\gamma$ .

Im Innern von  $G$  darf  $f$  Polstellen haben, und damit ist der CAUCHYSche Integralsatz nicht anwendbar.

Da  $G$  beschränkt ist und die Menge der Polstelle keine Häufungspunkte haben darf, wissen wir aber, daß es im Innern höchstens endlich viele Polstellen gibt; diese seien bei  $z_1, \dots, z_r$ , und ihre Hauptteile seien  $H_1(z), \dots, H_r(z)$ . Dann ist

$$f(z) = H_1(z) + \dots + H_r(z) + g(z)$$

mit einer holomorphen Funktion  $g(z)$ ; nach dem CAUCHYSchen Integralsatz ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} H_1(z) dz + \dots + \int_{\gamma} H_r(z) dz,$$

hängt also nur von den Hauptteilen ab.

Tatsächlich können wir noch viel mehr sagen: Genau wie im Reellen hat  $(z - z_i)^n$  die Stammfunktion  $\frac{(z - z_i)^{n+1}}{n+1}$ , und zwar für jedes ganzzahlige  $n$  mit der offensichtliche Ausnahme  $n = -1$ , für die  $n+1 = 0$  ist. Für  $n < 1$  ist diese Stammfunktion für alle  $z \neq z_i$  definiert, insbesondere also entlang des gesamten Integrationswegs  $\gamma$ , wo nach Voraussetzung keine Polstellen liegen, und damit können wir das Integral mittels dieser

Stammfunktion ausrechnen. Da Anfangs- und Endpunkt der geschlossenen Kurve  $\gamma$  übereinstimmen, ist

$$\int_{\gamma} a_{-n} (z - z_i)^{-n} dz = 0 \quad \text{für alle } n \neq 1.$$

Das Integral über  $H_i(z)$  längs der geschlossenen Kurve  $\gamma$  hängt also nur ab vom Term mit  $(z - z_0)^{-1}$ .

Von daher ist klar, daß der Koeffizient  $a_{-1}$  eine besondere Rolle spielt und einen eigenen Namen verdient:

**Definition:** Für eine meromorphe Funktion  $f$  auf  $D \subseteq \mathbb{C}$  mit LAURENT-Reihe

$$\sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

um  $z = z_0$  heißt der Koeffizient  $a_{-1}$  von  $(z - z_0)^{-1}$  das *Residuum* von  $f$  im Punkt  $z_0$ ; in Zeichen

$$a_{-1} = \text{Res}_{z_0} f.$$

Somit ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \text{Res}_{z_1} f \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_1} + \dots + \text{Res}_{z_r} f \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_r}.$$

Um auch noch die verbleibenden Integrale auf der rechten Seite auszurechnen, beginnen wir mit dem Integral über  $f(z) = 1/z$  längs eines Kreises um den Nullpunkt.

Im Reellen ist der Logarithmus die Stammfunktion von  $f$ , und das gilt im wesentlichen auch im Komplexen; nur haben wir bislang im Komplexen noch gar keinen Logarithmus definiert.

Im Reellen ist die Sache einfach: Die Funktion  $x \mapsto e^x$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert und ist monoton steigend; ihr Bildbereich sind die positiven reellen Zahlen. Wegen der Monotonie gibt es eine eindeutig definierte Umkehrfunktion  $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ , den natürlichen Logarithmus.

Im Komplexen ist die Funktion  $z \mapsto e^z$  ebenfalls auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert, wahlweise über ihre TAYLOR-Reihe um Null oder die EULERSche Formel

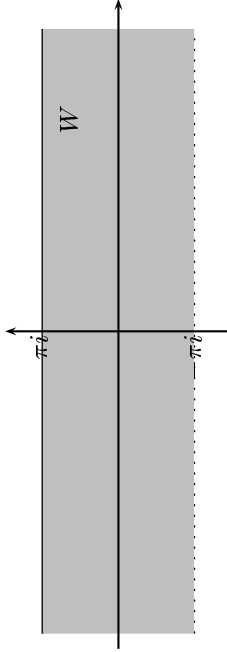
$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Wie letztere zeigt, besteht ihr Bildbereich aus allen komplexen Zahlen außer der Null. Die Formel zeigt aber auch, daß die Exponentialfunktion im Komplexen nicht einmal injektiv ist: Da Sinus und Kosinus Periode  $2\pi$  haben, hat  $e^z$  die Periode  $2\pi i$ , d.h.  $e^{z+2k\pi i} = e^z$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Eine Umkehrfunktion gibt es also nur, wenn wir den Definitionsbereich so einschränken, daß er keine zwei Punkte  $z, w$  enthält, die sich um ein (von Null verschiedenes) ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi i$  unterscheiden.

Ein solcher Bereich ist der Streifen

$$W = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } -\pi < y \leq \pi\};$$

es gibt also eine Umkehrfunktion  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow W$ .



**Definition:** Der Hauptwert  $\text{Ln } z$  des natürlichen Logarithmus der komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist die eindeutig bestimmte komplexe Zahl  $w \in W$  mit  $e^w = z$ .

Der so definierte Logarithmus ist aber leider nicht holomorph auf ganz  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , denn für eine negative reelle Zahl  $x$  ist  $\text{Ln } x = \ln |x| + \pi i$ , für benachbarte Zahlen der Form  $x - i\varepsilon$  mit kleinem  $\varepsilon > 0$  aber liegt  $\text{Ln}(x - i\varepsilon)$  in der Nähe von  $\ln |x| - \pi i$ . Der Hauptwert des natürlichen Logarithmus ist also unstetig auf der negativen reellen Achse; überquert man diese, springt er um  $2\pi i$ .

Wir wollen das Integral längs einer Kreislinie um den Nullpunkt berechnen; dabei müssen wir natürlich die negative reelle Achse überqueren. Wenn wir, wie wir es auch in der HMI meistens gemacht haben, im Gegenurzeigersinn integrieren, haben wir für einen Kreis mit Radius  $r$  auf der positiven reellen Achse  $\ln r$  als Wert für den Logarithmus; gehen wir dann nach oben, wird ein positiver Imaginärteil addiert, bis wir beim Punkt  $-r$  auf der negativen reellen Achse den Logarithmushauptwert  $\ln r + \pi i$  erreicht haben. Wenn wir dann weiter den Kreis entlang gehen, sind wir bei Logarithmushauptwerten nahe  $\ln r - \pi i$ , deren Imaginärteil immer kleiner wird, bis wir auf der positiven reellen Achse bei  $\ln r$  zurück sind.

Es ist klar, daß die unstetige Funktion  $\text{Ln } z$  nicht entlang der gesamten Kreislinie eine Stammfunktion von  $1/z$  ist; wir können Integrale über  $1/z$  nur entlang solcher Integrationswege durch den Hauptwert des Logarithmus ausdrücken, entlang derer der Hauptwert holomorph und damit insbesondere stetig ist, d.h. entlang von Wegen, die keinen Schnittpunkt mit der negativen reellen Achse (einschließlich Null) haben.

Ein solcher Integrationsweg ist beispielsweise für jedes  $\varepsilon \in (0, \pi)$

$$\gamma_\varepsilon: \begin{cases} [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto re^{it} \end{cases}$$

d.h. der Kreis mit Radius  $r$  um den Nullpunkt, aus dem ein kleiner Bogen um den Schnittpunkt mit der negativen reellen Achse entfernt wurde. Hier können wir das Integral über eine Stammfunktion berechnen als

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \text{Ln}(re^{i(\pi-\varepsilon)}) - \text{Ln}(re^{i(-\pi+\varepsilon)}) \\ = \ln r + i(\pi - \varepsilon) - \ln r - i(-\pi + \varepsilon) = 2\pi i - 2\varepsilon i.$$

Lassen wir  $\varepsilon$  gegen Null gehen, konvergiert dies gegen  $2\pi i$ , das Integral über  $1/z$  längs einer Kreislinie um den Nullpunkt, die im Gegenurzeigersinn durchlaufen wird, ist also  $2\pi i$ .

Es ist nun nicht schwierig, sich zu veranschaulichen (und sogar formal zu

beweisen), daß für *jede* geschlossene Randkurve  $\gamma$  eines einfach zusammenhängenden Gebiets, das den Nullpunkt als inneren Punkt enthält,

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

ist, und da  $i\text{Ln}(z - z + 0)$  Stammfunktion von  $1/(z - z_0)$  ist, folgt auch, daß auch für jeden anderen Punkt  $z_0$  im Innern des Gebiets gilt

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Zusammen mit den obigen Argumenten führt dies zum

**Residuensatz:** Die Funktion  $f$  sei meromorph in  $D \subseteq \mathbb{C}$  und  $\gamma$  sei eine ganz in  $D$  liegende Kurve, die Rand eines beschränkten Gebiets  $G$  sei und auf der  $f$  keine Pole habe. Dann hat  $f$  in  $G$  nur endlich viele Polstellen  $z_1, \dots, z_r$ , und

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r \text{Res}_{z_k} f.$$

### e) Berechnung der Residuen

Die Nützlichkeit dieses Satzes steht und fällt damit, daß wir die auf der rechten Seite auftretenden Residuen gut berechnen können.

Das Residuum einer meromorphen Funktion  $f$  an einer Stelle  $z_0$  ist der Koeffizient von  $(z - z_0)^{-1}$  in der LAURENT-Entwicklung von  $f$  und als solcher zumindest im Prinzip berechenbar. Für die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left( z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots \right) = z^{-3} - \frac{z^{-1}}{6} + \frac{z}{120} - \dots$$

etwa ist  $\text{Res}_0 f = \frac{1}{6}$ . Für die rationalen Funktionen, die wir als Hauptanwendung im Auge haben, ist diese Vorgehensweise aber im allgemeinen recht aufwendig. Hier ist oft eine teilweise Partialbruchzerlegung günstiger, aber im Falle eines Pols erster Ordnung geht alles noch viel einfacher:

In diesem Fall hat die LAURENT-Entwicklung die Form

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

also ist

$$\text{Res}_{z_0} f = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Dies funktioniert natürlich nur für Pole erster Ordnung, denn für Pole höherer Ordnung divergiert der rechtsstehende Grenzwert gegen unendlich.

### f) Anwendung auf reelle Integrale

Auf den ersten Blick erstaunlich, gerade für Anwendungen in der Elektrotechnik aber wichtig ist die Tatsache, daß sich auch eine ganze Reihe von bestimmten Integralen im Reellen am einfachsten über den Residuensatz berechnen lassen. Betrachten wir zum Beispiel das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

Natürlich können wir via Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion des Integranden finden, allerdings müssen wir dafür doch einiges arbeiten, und das Ergebnis

$$F(x) = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan(\sqrt{2}x - 1)$$

ist alles andere als angenehm.

Um auch dieses Integral über den Residuenkalkül ausrechnen zu können, setzen wir den Integranden fort zu einer komplexen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1};$$

diese ist holomorph in allen Punkten  $z \in \mathbb{C}$ , in denen der Nenner  $z^4 + 1$  nicht verschwindet.

Nach der dritten binomischen Formel ist  $(z^4 + 1)(z^4 - 1) = (z^8 - 1)$ , also

$$z^4 + 1 = \frac{z^8 - 1}{z^4 - 1}.$$

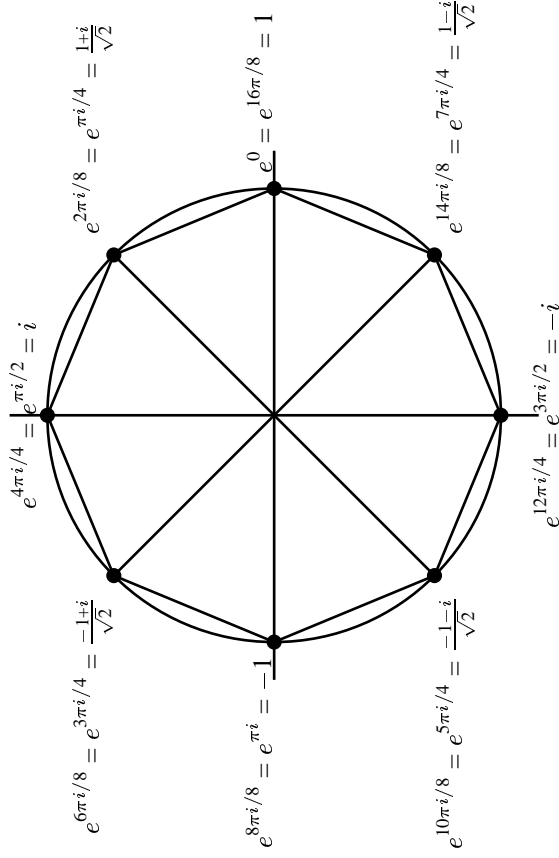
Die Nullstellen des Polynoms  $z^8 - 1$  sind jene komplexen Zahlen, deren  $n$ -te Potenz gleich Eins ist; man bezeichnet sie als die  $n$ -ten Einheitswurzeln. Da ein Polynom vom Grad  $n$  über einem Körper höchstens  $n$  Nullstellen haben kann, kann es höchstens  $n$  von ihnen geben; da für jede natürliche Zahl  $k$

$$(e^{2k\pi i/n})^n = e^{n \cdot 2k\pi i/n} = e^{2k\pi i} = 1$$

ist, gibt es genau die  $n$  Einheitswurzeln

$$1 = e^0, \quad e^{2k\pi i/n}, \quad e^{4k\pi i/n}, \quad \dots, \quad e^{(n-1) \cdot 2\pi i/n}.$$

Auf dem Einheitskreis sind sie die Eckpunkte eines regelmäßigen  $n$ -Ecks, was die folgende Zeichnung für den Fall  $n = 8$  illustriert:



Ist  $m$  ein Teiler von  $n$ , so ist jede  $m$ -te Einheitswurzel erst recht eine  $m$ -ten Einheitswurzel; wir bezeichnen eine  $m$ -te Einheitswurzel als *primitiv*, wenn es keinen echten Teiler  $m$  von  $n$  gibt, für den sie bereits  $m$ -te Einheitswurzel ist.

Eine achte Einheitswurzel ist offenbar genau dann primitiv, wenn sie nicht gleichzeitig vierte Einheitswurzel ist; die Nullstellen von  $z^4 + 1$  sind also genau die primitiven achten Einheitswurzeln

$$e^{\pi i/4}, \quad e^{3\pi i/4}, \quad e^{5\pi i/4} \quad \text{und} \quad e^{7\pi i/4}.$$

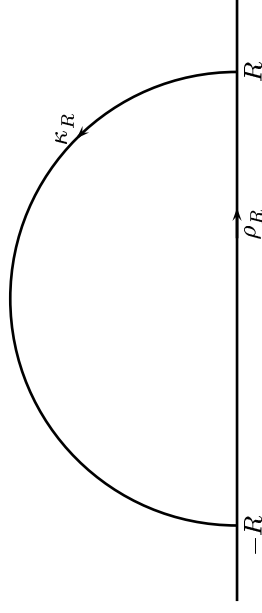
Wir betrachten nun für  $R > 1$  einen Integrationsweg  $\gamma_R$ , der zusammengesetzt ist aus dem eigentlich interessierenden reellen Integrationsweg

$$\rho_R: \begin{cases} [-R, R] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto t \end{cases}$$

von  $-R$  bis  $R$  und einem Halbkreis

$$\kappa_R: \begin{cases} [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto Re^{it} \end{cases}$$

in der oberen Halbebene von  $\mathbb{C}$ , der von  $R$  im Gegenuhrzeigersinn nach  $-R$  führt.



Beides zusammen bildet eine geschlossene Kurve, und Polstellen des Integranden gibt es nur bei den primitiven achten Einheitswurzeln, von denen allerdings nur  $e^{\pi i/4}$  und  $e^{3\pi i/4}$  im Halbkreis liegen. Nach dem

Residuensatz ist daher für  $R > 1$

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i (\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f).$$

Die Residuen lassen sich wie oben bestimmen, beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{(z - e^{\pi i/4})(z + e^{\pi i/4})(z - e^{3\pi i/4})(z + e^{3\pi i/4})} \\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/4} - e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4} + e^{3\pi i/4})} \\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/2} - 2e^{3\pi i/2})} \\ &= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(i - (-i))} = \frac{1}{4i} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{2}i) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}(-1 - i), \end{aligned}$$

und genauso könnte man auch  $\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f = \frac{\sqrt{2}}{8}(1 - i)$  berechnen. Eine Alternative wäre die Regel von DE L'HOSPITAL: Danach ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} \quad \text{und} \\ \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/4}} \frac{z - e^{3\pi i/4}}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{9\pi i/4}} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}, \end{aligned}$$

was zumindestest für dieses  $f$  geringfügig einfache war als die obige Rechnung. Beide zusammen ergeben

$$\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f = \frac{e^{-3\pi i/4} + e^{-\pi i/4}}{4}.$$

Um dies weiter auszurechnen kann man entweder, in diesem Fall sehr einfach, die Polarkoordinatendarstellungen  $e^{-3\pi i/4}$  und  $e^{-\pi i/4}$  verwenden, oder aber man versucht, die Summe über die EULERSCHEN Formeln als trigonometrische Funktion zu interpretieren:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-3\pi i/4} + e^{-\pi i/4}}{4} &= e^{-\pi i/2} \cdot \frac{e^{-\pi i/4} + e^{\pi i/4}}{4} = \frac{2}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{i}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{i\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Damit ist also

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = 2\pi i (\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f) = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Was uns wirklich interessiert ist allerdings nicht das Integral über  $\gamma_R$ , sondern das über  $\rho_R$ . Wir können es aus dem über  $\gamma_R$  berechnen, wenn wir das Integral über den Halbkreisbogen  $\kappa_R$  kennen. Dieses Integral kennen wir zwar nicht, aber wir können uns leicht überlegen, daß es für  $R \rightarrow \infty$  gegen Null geht:

$$\int_{\kappa_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{R^4 e^{4it} + 1} dt,$$

und da der Integrand rechts für  $R \rightarrow \infty$  überall gegen Null geht, gilt dasselbe auch für das Integral über das endliche Intervall  $[0, \pi]$ . Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^4 + 1} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dz}{z^4 + 1} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4 + 1} - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\kappa_R} \frac{dz}{z^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

Ähnlich kann man bei anderen Integralen von  $-\infty$  nach  $\infty$  vorgehen, vorausgesetzt der Integrand hat keine Polstellen auf der reellen Achse, die Residuen der Polstellen in der oberen Halbebene sind bekannt und für

das Integral über den Halbkreisbogen  $\kappa_R$  kann zumindest der Grenzwert für  $R \rightarrow \infty$  bestimmt werden.

Für uns interessant ist vor allem der folgende Fall:

**Satz:**  $f(x) = P(x)/Q(x)$  sei Quotient zweier Polynome  $P(x)$  und  $Q(x)$  mit  $\deg P \leq \deg Q - 2$ , und  $Q(x)$  habe keine reelle Nullstelle. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^r \operatorname{Res}_{z_i} f,$$

wobei  $z_1, \dots, z_r$  die komplexen Nullstellen von  $Q$  mit positivem Imaginärteil sind.

*Beweis:*  $Q(z)$  als Polynom kann höchstens  $\deg Q$  Nullstellen haben, insbesondere also nur endlich viele. Unter diesen seien  $z_1$  bis  $z_r$  diejenigen mit positivem Imaginärteil, und  $R$  sei eine reelle Zahl, die größer sei als die Beträge aller  $z_i$ . Dazu betrachten wir, wie oben im Beispiel, einen Integrationsweg  $\gamma_R$ , der zusammengesetzt ist aus dem eigentlich interessierenden reellen Integrationsweg

$$\rho_R: \begin{cases} [-R, R] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto t \end{cases}$$

von  $-R$  bis  $R$  und einem Halbkreis

$$\kappa_R: \begin{cases} [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto Re^{it} \end{cases}$$

in der oberen Halbebene von  $\mathbb{C}$ , der von  $R$  im Gegenuhzeigersinn nach  $-R$  führt. Nach dem Residuensatz ist dann

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^r \operatorname{Res}_{z_i} f.$$

Andererseits ist

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\rho_R} f(z) dz + \int_{\kappa_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\kappa_R} f(z) dz,$$

also

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^r \operatorname{Res}_{z_i} f - \int_{\kappa_R} f(z) dz.$$

Dabei ist

$$\int_{\kappa_R} f(z) dz = \int_{\kappa_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_0^\pi \frac{P(Re^{it}) \cdot iRe^{it}}{Q(Re^{it})} dt,$$

wobei der Zähler rechts trotz des zusätzlichen Faktors  $R$  immer noch kleineren Grad hat als der Nenner. Somit geht der Integrand unabhängig von  $t$  für  $R \rightarrow \infty$  gegen null. Da das Integrationsintervall von 0 bis  $2\pi$  trotz wachsendem  $R$  immer dasselbe bleibt, geht dann auch das Integral gegen null.

Für  $R \rightarrow \infty$  wird die obige Formel daher zu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^r \operatorname{Res}_{z_i} f - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\kappa_R} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^r \operatorname{Res}_{z_i} f, \end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Die Nützlichkeit des Residuensatzes für reelle Integrale ist nicht auf rationale Integranden beschränkt; beispielsweise läßt sich damit (auf Umwegen) auch ein Integral wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

berechnen, wobei hier die Stammfunktion des Integranden nicht einmal elementar angebar ist. Da sie trotzdem beispielsweise in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle spielt, definiert man sie als den sogenannten *Integralsinus*

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt;$$

da  $\frac{\sin t}{t}$  eine gerade Funktion ist, zeigt die obige Formel somit, daß  $\text{Si}(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{\pi}{2}$  konvergiert.

## §2: Reelle und komplexe Fourier-Reihen

Wir beginnen mit einem einfachen und anschaulichen Beispiel für den Aufbau einer komplizierten Funktion aus reinen Schwingungen; Ziel des Paragraphen wird sein, eine (fast) *beliebige* periodische Funktion möglichst exakt als Überlagerung solcher Schwingungen darzustellen.

### a) Die schwingende Saite

Ein Ton werde erzeugt durch eine schwingende Saite. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß diese ausschließlich senkrecht zu ihrer Ruhelage schwingt und daß ihre Schwingung auf eine feste Ebene begrenzt ist; die Physiker bezeichnen dies als eine transversale linear polarisierte Schwingung. Zumindest in erster Näherung kann man, bei nicht zu extremer Auslenkung der Saiten, einige Musikinstrumente so beschreiben.

Der Zustand der Saite zu einem *festen Zeitpunkt* wird beschrieben durch eine Funktion der Längenkoordinate, die wir wie üblich mit  $x$  bezeichnen wollen. Der Wert dieser Funktion an jeder Stelle  $x$  ist aber, da die Saite schwingt, auch eine Funktion der Zeit. Wir haben also insgesamt eine Funktion  $f(x, t)$  sowohl der Längenkoordinate als auch der Zeit, die angibt, wie weit der Punkt mit Längenkoordinate  $x$  zum Zeitpunkt  $t$  von seiner Ruhelage entfernt ist. Falls wir annehmen, daß die Schwingung in der  $(x, y)$ -Ebene stattfindet, ist  $f(x, t)$  also die  $y$ -Koordinate des Punktes

mit Längenkoordinate  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ . Da wir nur transversale linear polarisierte Schwingungen betrachten, hat dieser Punkt die Koordinaten

$$(x, f(x, t));$$

falls wir auch longitudinale Schwingungen zugelassen hätten, würde auch die  $x$ -Koordinate von der Zeit abhängen, und falls wir uns nicht auf linear polarisierte Schwingungen festgelegt hätten, gäbe es noch eine  $z$ -Koordinate.

Die Saite ist an beiden Enden fest eingespannt; wir wählen die Koordinaten auf der  $x$ -Achse so, daß diese Enden den Werten  $x = 0$  und  $x = L$  entsprechen, wobei  $L \in \mathbb{R}$  die Länge der Saite bezeichnet. Da die Enden nicht schwingen können, muß notwendigerweise

$$f(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad f(L, t) = 0$$

sein; nur für  $0 < x < L$  kann  $f(x, t)$  wirklich von  $t$  abhängen.

Wie könnte  $f$  aussehen? In ihrer Ruhelage ist die Saite eine Strecke; die einfachste Form einer Schwingung könnte darin bestehen, daß diese Strecke durch einen Teil einer Sinuslinie ersetzt wird. Da die Funktion an den Stellen 0 und  $L$  verschwinden muß und der Sinus bei allen ganzzahligen Vielfachen von  $\pi$  verschwindet, kommen daher Funktionen der Art

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

in Frage, wobei  $A(t)$  irgendeine Funktion der Zeit ist und  $k$  eine natürliche Zahl. Abbildung zwei zeigt die entsprechenden Funktionen für  $k = 1$  bis 4 und  $A(t) \equiv 1$ .

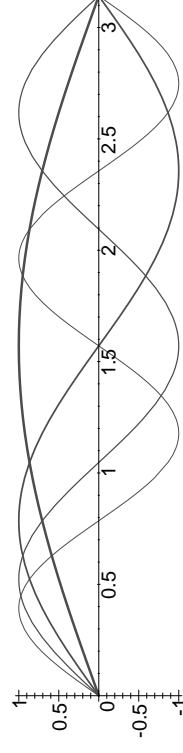


Abb. 2: Eine Schwingung mit Oberschwingungen

Bei einem realen Musikinstrument werden diese Oberschwingungen nicht alle dieselbe Amplitude haben; aus Kapitel I, §1f) etwa ist das Beispiel der g-Saite einer Geige bekannt, das hier noch einmal in Abbildung drei dargestellt ist: Die gestrichelte Kurve ist die Grundschwingung mit Amplitude eins, die fett eingezeichnete Kurve die Gesamtschwingung, und die sonstigen Kurven sind die reinen Teilschwingungen mit ihren jeweiligen Amplituden. (Wer selbst solche Kurven konstruieren und auch die dazugehörigen Töne hören möchte, findet ein Java-Applet unter <http://www.gac.edu/~huber/fourier/>)

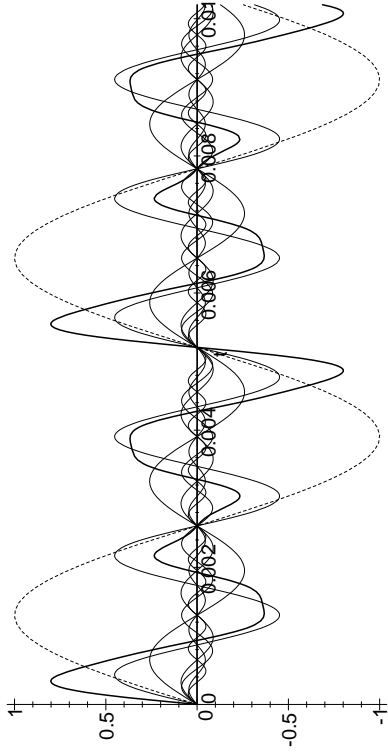


Abb. 3: Ton der g-Saite einer Geige und seine Komponenten

Offensichtlich spielt die Grundschwingung kaum eine Rolle: Wie man sowohl hier als auch genauer an der Darstellung der Größenverhältnisse der Koeffizienten in Abbildung vier sieht, sind die Schwingungen mit doppelter und dreifacher Grundfrequenz am stärksten ausgeprägt, d.h. also die Oktave und vor allem die darüberliegende Quinte.

Über die zeitabhängige Auslenkungsfunktion  $A(t)$  wurde bislang noch nichts gesagt; da wir periodische Schwingungen erwarten, liegt es nahe, auch hier einen Ansatz mit trigonometrischen Funktionen zu machen. Wenn wir die Zeitachse so festlegen, daß sich die Saite zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhelage befindet, ist der Sinus die geeignete Funktion; wir

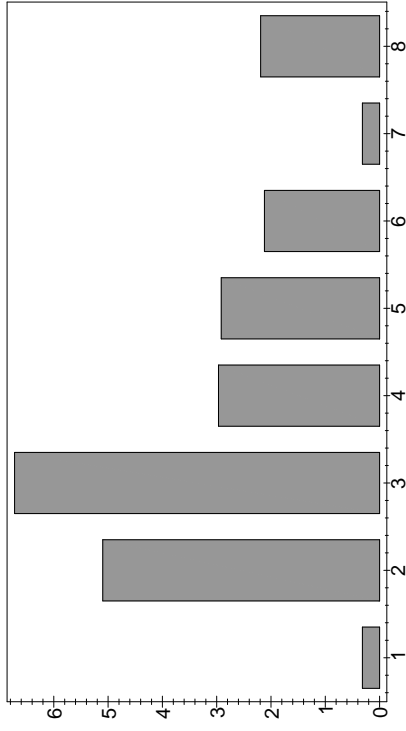


Abb. 4: Koeffizienten von Grund- und Oberschwingungen

versuchen es daher für eine reine Schwingung mit einem Ansatz der Form

$$A(t) = a \cdot \sin \omega t,$$

wobei  $a$  und  $\omega$  reelle Konstanten sind, von denen wir zumindest  $\omega$  als positiv voraussetzen können. Insgesamt erwarten wir somit im einfachsten Fall Funktionen der Form

$$f(x, t) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right).$$

$\omega$  und  $k$  hängen natürlich voneinander ab: Wie jedermann aus Physik- und Musikunterricht weiß, führt ein doppelt so großer Wert von  $k$  zu einer doppelt so hohen Kreisfrequenz  $\omega$ .

## b) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite

Wer sich allerdings kurz überlegt, *warum* dem so ist, wird wohl in den meisten Fällen nur auf den „Grund“ kommen, daß dies eben allgemein bekannt sei. Tatsächlich stecken dahinter einige nicht ganz triviale Überlegungen, die man für die Zwecke dieser Vorlesung zwar nicht unbedingt kennen muß, die aber für etwaige Interessenten trotzdem im Kleindruck beigefügt sind:



Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, gehen wir aus von einer Saite mit konstantem Querschnitt und konstanter Massendichte; letztere können wir dann beschreiben durch die Masse pro Längeneinheit, die für konkrete Saiten gemessen wird in Gramm pro Zentimeter oder Milligramm pro Zentimeter. Wir bezeichnen diese (lineare) Massendichte mit  $\sigma$ .

Die zweite wesentliche physikalische Größe für eine schwingende Saite ist deren *Spannung*. Auch hier beschränken wir uns wieder auf das einfachste physikalische Modell, in dem das HOOKEsche Gesetz gilt: Wir betrachten die Saite als eine elastische Feder, die eine natürliche Länge  $L_0$  hat. Da sie aber in ein Musikinstrument eingespannt ist, wurde sie auf eine Länge  $L > L_0$  gedehnt; nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt somit eine Rückstellkraft  $\lambda L/L_0$ , die proportional ist zur Überdehnung  $L/L_0$  mit der Federkonstanten  $\lambda$  als Proportionalitätsfaktor.

In der Ruhelage ist diese Rückstellkraft bedeutungslos: Da die Saite an beiden Enden fest eingespannt ist, kann sie ihre Länge nicht verringern. Anders wird es, wenn die Saite aus der Ruhelage entfernt wird: Dann hat die Federkraft in allen Punkten, an denen die (Tangente der) Saite nicht parallel zur  $x$ -Achse ist, auch eine Kraftkomponente in  $y$ -Richtung.

Die Lage der ausgelenkten Saite zu einem festen Zeitpunkt  $t$  wird beschrieben durch die Funktion

$$g(x) = f(x, t),$$

die die  $y$ -Koordinate des Punkts  $x$  angibt.

Betrachten wir das Saitenstück zwischen  $x = x_1$  und  $x = x_2$ . Im Punkt  $x_1$  habe die Tangente den Winkel  $\alpha$  gegenüber der Horizontalen, im Punkt  $x_2$  sei dieser Winkel  $\beta$ . Falls  $x_1$  und  $x_2$  einigermaßen nahe beieinander liegen, können wir die Saite zwischen  $x_1$  und  $x_2$  in erster Näherung als eine Gerade betrachten. Diese Gerade sei um den Winkel  $\gamma$  gegenüber der Horizontalen geneigt; dann hat das Stück zwischen  $x = x_1$  und  $x = x_2$  die Länge

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos \gamma},$$

denn der Kosinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist gleich Ankathete durch Hypothenuse. Gegenüber ihrer Ruhelage ist die ausgelenkte Saite daher noch um einen weiteren (lokalen) Faktor  $1/\cos \gamma$  gestreckt.

Die Rückstellkraft in Richtung der *ausgelenkten Saite* ist daher gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma},$$

und die Komponente in  $y$ -Richtung ist im Punkt  $x_1$  gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \sin \alpha$$

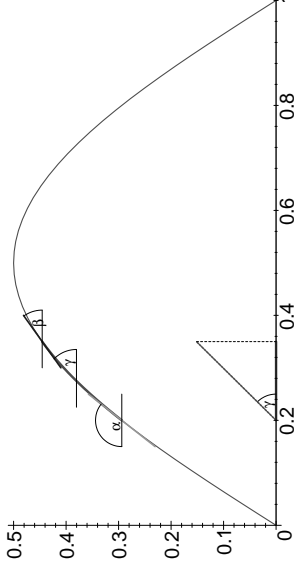


Abb. 5: Eine ausgelenkte Saite

und im Punkt  $x_2$  entsprechend gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \sin \beta.$$

Da  $\alpha$  und  $\beta$  bei gängigen Musikinstrumenten ziemlich klein sind, machen wir kein großen Fehler, wenn wir die Näherungsformeln

$$\sin x \approx x \approx \tan x$$

für im Bogenmaß gemessene Winkel  $x$  benutzen; demnach können wir also den Sinus in obigen Formeln ohne großen Genauigkeitsverlust durch einen Tangens ersetzen.

Der Tangens des Steigungswinkels der Tangenten des Graphen einer Funktion  $y = g(x)$  gegenüber der Horizontalen ist gleich der Ableitung  $g'(x)$ , die Rückstellkräfte im Anfangs- und im Endpunkt des betrachteten Kurvenstücks sind also näherungsweise gleich

$$-\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_1) \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_2).$$

Bei einem hinreichen kleinen Saitenstück ist die resultierende Rückstellkraft gleich der Summe dieser beiden Komponenten, also

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_2) - \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot g'(x_1) = \lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)).$$

Da wir von sehr kleinen Winkeln  $\gamma$  ausgehen, liegt  $\cos \gamma$  sehr nahe bei eins und kann, da wir hier ohnehin nur näherungsweise argumentieren, gleich eins gesetzt werden; die Rückstellkraft ist also näherungsweise gleich

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)).$$

Diese Kraft bedingt nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz eine Bewegung der Massenpunkte auf der Saite. Ein solcher Massenpunkt mit  $x$ -Koordinate  $x_0$  hat eine zeitabhängige Auslenkung

$$h(t) = f(x_0, t),$$

und für die Kraft, die dies bewirkt, gilt nach dem zweiten NEWTONSchen Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung}.$$

Bei einem hinreichend kleinen Saitenstück können wir die Masse näherungsweise gleich der Masse,

$$m = \sigma \cdot (x_2 - x_1)$$

des gesamten Stück setzen. Die Beschleunigung ist gleich der zweiten Ableitung  $\ddot{h}(t)$  der Auslenkung, also gilt insgesamt

$$\lambda \cdot \frac{L}{L_0} \cdot (g'(x_2) - g'(x_1)) = \sigma \cdot (x_2 - x_1) \cdot \ddot{h}(t)$$

oder

$$\frac{g'(x_2) - g'(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \ddot{h}(t).$$

Lassen wir nun  $x_2$  und  $x_1$  simultan gegen einen dazwischenliegenden Punkt  $x$  gehen, konvergiert die linke Seite gegen  $g''(x)$ , wir bekommen also die Gleichung

$$g''(x) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} \ddot{h}(t).$$

Damit sind wir fast fertig; wir müssen uns nur noch klarmachen, daß die beiden Funktionen  $g(x)$  und  $h(t)$  spezielle Werte der Funktion  $f(x, t)$  berechnen: Für einen oben festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Zeitpunkt  $t$  ist  $g(x) = f(x, t)$ , und für einen ebenfalls festgehaltenen (aber nicht weiter spezifizierten) Punkt  $x$  auf der Saite ist  $h(t) = f(x, t)$ . Daher ist

$$g''(x) = f_{xx}(x, t) \quad \text{und} \quad \ddot{h}(t) = f_{tt}(x, t),$$

und die Differentialgleichung der schwingenden Saite wird zu

$$f_{xx}(x, t) = \frac{\sigma L_0}{\lambda L} f_{tt}(x, t)$$

oder, wie man meist schreibt,

$$f_{tt}(x, t) = \frac{\lambda L}{\sigma L_0} f_{xx}(x, t).$$

Da es uns auf exakte Zahlenwerte nicht ankommt, wählen wir noch eine Abkürzung für den Bruch; da er positiv ist, können wir ihn als Quadrat schreiben und definieren

$$c^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda L}{\sigma L_0}.$$

Mit dieser neuen Bezeichnung wird die Differentialgleichung der schwingenden Saite zu

$$f_{tt}(x, t) = c^2 f_{xx}(x, t).$$

Sie allein legt  $f(x, t)$  bei weitem noch nicht eindeutig fest: Sind  $\varphi$  und  $\psi$  irgendwelche zweifach stetig differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen, so überzeugt man sich leicht (Kettenregel), daß

$$f(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, die sogenannte D'ALEMBERTSche Lösung. Sie zeigt, daß man die Konstante  $c$  interpretieren kann als Schallgeschwindigkeit *innerhalb der Saite*; die beiden Terme beschreiben Erregungen, die sich gegenläufig auf der Saite fortbewegen.

Wir waren oben ausgegangen von speziellen sinusförmigen Lösungen der Form

$$f(x, t) = A(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = a \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

und müssen nun sehen, für welche Parameterwerte dies Lösungen sind.

Die partiellen Ableitungen von  $f$  sind

$$f_t(x, t) = a\omega \cdot \cos \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$f_{tt}(x, t) = -a\omega^2 \cdot \sin \omega t \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = -\omega^2 f(x, t)$$

$$f_x(x, t) = a \cdot \sin \omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$f_{xx}(x, t) = -a \cdot \sin \omega t \cdot \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 f(x, t),$$

also ist

$$f_{tt}(x, t) = \left(\frac{k\pi}{\omega L}\right)^2 f_{xx}(x, t).$$

Die Differentialgleichung ist somit genau dann erfüllt, wenn

$$c = \frac{k\pi}{\omega L} \quad \text{oder} \quad \omega = k \cdot \frac{\pi}{cL}.$$

Wie diese Rechnung zeigt, wächst zumindest für die hier betrachteten einfachen Schwingungen die Frequenz in der Tat linear mit  $k$ , die Frequenzen der Obertöne sind also ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz.

### c) Orthogonalitätsrelationen

Wie eingangs erwähnt, wollen wir in diesem Paragraphen (fast) beliebige periodische Funktionen durch Linearkombinationen von reinen Schwingungen beschreiben; bevor wir damit beginnen, müssen wir uns zunächst überlegen, welche Funktionen genau wir betrachten wollen.

Wir dürfen uns auf keinen Fall nur auf stetige Funktionen beschränken; Rechteckimpulse beispielsweise spielen eine sehr wichtige Rolle in der

Informationstechnik. Andererseits wollen wir aber nicht soweit gehen, auch Funktionen wie

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für rationale } t \\ \cos t & \text{für irrationale } t \end{cases}$$

zu betrachten, wir müssen also einen Kompromiss finden.

**Definition:** Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *stückweise stetig*, wenn die Menge aller Unstetigkeitsstellen von  $f$  keine Häufungspunkte hat und wenn für jede Unstetigkeitsstelle  $t$  die links- und rechtsseitigen Grenzwerte

$$\lim_{s \rightarrow t^-} f(s) \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow t^+} f(s)$$

existieren. (Wir verlangen nicht, daß sie gleich sind: Das gilt nur, wenn  $f$  an der Stelle  $t$  stetig ist.)

Damit sind also Rechteckimpulse und allgemeiner alle Funktionen, die bis auf isolierte Sprungstellen stetig sind, stückweise stetig.

Auch periodische Funktionen sollten wir vorsichtshalber zumindest einmal formal definieren:

**Definition:** Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *periodisch zur Periode  $T$* , wenn für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f(t + T) = f(t).$$

Ist  $f$  periodisch zur Periode  $T$ , so offensichtlich auch zur Periode  $2T$  oder  $-5T$  usw.; falls es einen kleinsten positiven Wert  $T$  gibt, zu dem  $f$  periodisch ist, bezeichnen wir diesen als *die* Periode von  $f$ . In diesem Sinne haben also  $\sin t$  und  $\cos t$  die Periode  $2\pi$ , wohingegen konstante Funktionen für jedes  $T \in \mathbb{R}$  periodisch zur Periode  $T$  sind, so daß wir hier nicht von *der* Periode reden können.

Eine periodische Funktion ist eindeutig bestimmt durch ihre Werte in irgendeinem abgeschlossenen Intervall  $J$  der Länge  $T$ , denn für jedes  $t \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $k \in \mathbb{Z}$ , so daß  $t - kT \in J$ , und wegen der Periodizität muß  $f(t) = f(t - kT)$  sein. Ein solches Intervall der Länge  $T$  bezeichnen wir kurz als ein *Periodenintervall*.

Da jede unendliche Menge in einem abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  einen Häufungspunkt hat, kann eine stückweise stetige Funktion in jedem solchen Intervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen haben; insbesondere gibt es also bei einer stückweise stetigen periodischen Funktion in jedem Periodenintervall höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen, und durch diese sind *alle* Unstetigkeiten der Funktion festgelegt.

Wir betrachten im folgenden für jede reelle Zahl  $T > 0$  die beiden Mengen

$$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right\}$$

und

$$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} f \text{ stückweise stetig und} \\ \text{periodisch zur Periode } T \end{array} \right\}.$$

Da Linearkombinationen periodischer Funktionen zur selben Periode  $T$  wieder periodisch mit  $T$  sind und die Nullfunktion periodisch ist zu jeder Periode, ist  $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Da auch das Produkt zweier stückweise stetiger Funktionen stückweise stetig ist, existiert für  $f, g \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  das Integral

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt,$$

und das so definierte Produkt hat *fast* alle Eigenschaften eines Skalarprodukts: Symmetrie und Bilinearität sind klar, und da Quadrate in  $\mathbb{R}$  stets nichtnegativ sind, ist auch für alle  $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$(f, f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \geq 0.$$

Leider kann aber für eine nur stückweise stetige Funktion  $(f, f) = 0$  sein, ohne daß  $f$  gleich der Nullfunktion wäre, beispielsweise für

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } t = kT \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit ist  $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  kein EUKLIDISCHER Vektorraum; das gerade eingeführte Produkt wird uns aber trotzdem im folgenden sehr nützlich sein.

Entsprechend definieren wir auf  $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ein Produkt durch

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt;$$

es hat alle Eigenschaften eines HERMITESCHEN Skalarprodukts *außer* der positiven Definitheit.

Wenn wir wirklich EUKLIDISCHE oder HERMITESCHE Vektorräume wollen, können wir uns auf die Unterräume

$$L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(t) = \frac{1}{2} \left( \lim_{s \rightarrow t^+} f(s) + \lim_{s \rightarrow t^-} f(s) \right) \right\}$$

und

$$L_T^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \left\{ f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f(t) = \frac{1}{2} \left( \lim_{s \rightarrow t^+} f(s) + \lim_{s \rightarrow t^-} f(s) \right) \right\}$$

beschränken, für deren Elemente in jeder Sprungstelle  $t$  der Funktionswert gleich dem arithmetischen Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert ist; sie bilden offensichtlich einen Untervektorraum, und jedes Element, das von der Nullfunktion verschieden ist, hat auf einem abgeschlossenen Intervall Funktionswerte mit positivem Betrag, so daß sein Skalarprodukt mit sich selbst nicht verschwinden kann.

Für praktische Anwendungen ist es gleichgültig, ob man mit  $L$  oder  $L^0$  arbeitet will, denn jeder Funktion aus  $L$  kann man eine Funktion aus  $L^0$  zuordnen, die sich höchstens in den Sprungstellen von dieser unterscheidet; der Unterschied zwischen den beiden Funktionen ist somit nicht meßbar.

Fundamental für das weitere ist die folgende Orthogonalitätseigenschaft:

**Lemma:** Mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  und  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  ist

$$(e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1 & \text{falls } k = \ell \end{cases}.$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} T \cdot (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) &= \int_0^T e^{ik\omega t} \overline{e^{i\ell\omega t}} dt = \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t} dt \\ &= \int_0^T e^{i(k-\ell)\omega t} dt. \end{aligned}$$

Für  $k = \ell$  integrieren wir hier die Konstante eins über ein Intervall der Länge  $T$ , das Integral ist also  $T$ . Für  $k \neq \ell$  hat der Integrand die Stammfunktion

$$\frac{e^{i(k-\ell)\omega t}}{i(k-\ell)},$$

die wegen der Beziehung  $\omega T = 2\pi$  periodisch ist mit Periode  $T$ ; das Integral verschwindet also. Division durch  $T$  liefert die Behauptung. ■

Zerlegen wir die komplexe Exponentialfunktion in Real- und Imaginärteil, erhalten wir die etwas umständlicheren entsprechenden Beziehungen für trigonometrische Funktionen. Da Kosinus eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion ist, sind negative  $k$  und  $\ell$  uninteressant; wir begnügen uns daher mit

**Lemma:** Mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  und  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$  ist

$$\begin{aligned} (\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0, \\ 1 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}, \\ (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases} \quad \text{und} \\ &(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0. \end{aligned}$$

*Beweis:* Wir verwenden das gerade bewiesene Lemma; danach ist mit

dem KRONECKER- $\delta$  ausgedrückt

$$\begin{aligned} \delta_{k\ell} &= (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = (\cos k\omega t + i \sin k\omega t, \cos \ell\omega t + i \sin \ell\omega t) \\ &= (\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) \end{aligned}$$

$$+ i(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) - i(\cos k\omega t, \sin \ell\omega t),$$

also ist

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) - (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Diese Gleichungen gelten auch, wenn wir  $\ell$  durch  $-\ell$  ersetzen; sie werden dann zu

$$(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) - (\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k, -\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) + (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Addiert bzw. subtrahiert man jeweils zwei der sich nur im Vorzeichen unterscheidenden Gleichungen, folgt, daß für  $k, \ell \geq 0$

$$2(\cos k\omega t, \cos \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k, -\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 2 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist und

$$2(\sin k\omega t, \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k, -\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

außerdem ist

$$(\sin k\omega t, \cos \ell\omega t) = (\cos k\omega t, \sin \ell\omega t) = 0.$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Ein Leser, der noch nicht davon überzeugt ist, daß komplexe Zahlen und Funktionen auch im Reellen nützlich sind, sollte versuchen, dies rein reell zu beweisen: er muß also zeigen, daß

$$\int_0^T \cos k\omega t \cos \ell\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ T & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

und

$$\int_0^T \sin k\omega t \sin \ell\omega t dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist, sowie

$$\int_0^T \cos k\omega t \sin \ell\omega t dt = 0.$$

Eine ganze Reihe dieser Integrationen sind trivial, und *alle* sind rein reell durchführbar. Dennoch spart der Umweg übers Komplexe viel Zeit.

#### d) Harmonische Analyse trigonometrischer Polynome

Die Funktionen  $e^{k \cdot i\omega t}$  bilden natürlich keine Basis von  $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , genauso wenig wie die Funktionen  $\cos k\omega t$  und  $\sin \ell\omega t$  eine Basis von  $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  bilden: Basisdarstellungen sind schließlich stets *endliche* Linearkombinationen, und eine endliche Linearkombination von trigonometrischen oder Exponentialfunktionen ist insbesondere stetig.

Trotzdem ist es ganz nützlich, zur Demonstration der weiteren Vorgehensweise zunächst die Untervektorräume zu betrachten, die von diesen Funktionen erzeugt werden:

**Definition:** a) Der Vektorraum  $P_T(\mathbb{C})$  aller komplexer trigonometrischer Polynome der Periode  $T$  ist der von den Funktionen  $e^{k \cdot i\omega t}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  aufgespannte Untervektorraum von  $L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

b) Der Vektorraum  $P_T(\mathbb{R})$  aller reeller trigonometrischer Polynome der Periode  $T$  ist der von den Funktionen  $\cos k\omega t$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  und den Funktionen  $\sin \ell\omega t$  mit  $\ell \in \mathbb{N}$  aufgespannte Untervektorraum von  $L_T^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Die gerade bewiesenen Orthogonalitätsrelationen können wir dann auch so formulieren, daß die Funktionen  $e^{k \cdot i\omega t}$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  eine Orthonormalbasis von  $P_T(\mathbb{C})$  bilden, während die Funktionen  $1, \sqrt{2} \cos k\omega t$  und  $\sqrt{2} \sin \ell\omega t$  mit  $k, \ell \in \mathbb{N}$  eine Orthonormalbasis von  $P_T(\mathbb{R})$  bilden.

Zumindest für Funktionen aus  $P_T(\mathbb{C})$  und  $P_T(\mathbb{R})$  ist damit klar, wie man sie in reine Schwingungen zerlegen kann: Ist allgemein  $V$  ein

EUKLIDISCHER oder HERMITESCHER Vektorraum und  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ , so läßt sich ein beliebiger Vektor  $\vec{v} \in V$  gemäß

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} (\vec{v}, \vec{b}) \vec{b}$$

als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken.

Für  $f \in P_T(\mathbb{C})$  ist somit

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = (f(t), e^{ki\omega t}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ki\omega t} dt,$$

und für  $f \in P_T(\mathbb{R})$  ist

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \sin \ell\omega t$$

mit

$$c_0 = (f(t), 1) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \sqrt{2} \cdot (f(t), \sqrt{2} \cos k\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_{\ell} = \sqrt{2} \cdot (f(t), \sqrt{2} \sin \ell\omega t) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell\omega t dt.$$

Die Summen in diesen Formeln sind natürlich nur formal unendlich; da ein trigonometrisches Polynom nach Definition *endliche* Linearkombination der Basisfunktionen ist, können in jeder dieser Summen höchstens endlich viele Summanden von Null verschieden sein.

Da die Formeln für reelle trigonometrische Polynome deutlich unangenehmer sind als die für komplexe, lohnt es sich oft, auch für reelle Funktionen den Umweg über das Komplexe zu gehen. Das ist immer

möglich, denn auf Grund der EULERSchen Beziehungen ist jedes reelle trigonometrische Polynom gleichzeitig ein komplexes:

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^M b_{\ell} \sin \ell\omega t \\ = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \frac{e^{ki\omega t} + e^{-ki\omega t}}{2} + \sum_{\ell=1}^M b_{\ell} \frac{e^{\ell i\omega t} e^{-\ell i\omega t}}{2i} \\ = a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2} e^{ki\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2} e^{-k i\omega t} - i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_{\ell}}{2} e^{\ell i\omega t} + i \sum_{\ell=1}^M \frac{b_{\ell}}{2} e^{-\ell i\omega t} \\ = a_0 + \sum_{k=1}^N \frac{a_k - ib_k}{2} e^{k i\omega t} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-k i\omega t}. \end{aligned}$$

Schreibt man dies in der üblichen Weise als komplexes trigonometrisches Polynom  $\sum c_k e^{k i\omega t}$ , ist also

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{für } k > 0 \\ a_0 & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Insbesondere sind  $c_k$  und  $c_{-k}$  für alle  $k$  komplex konjugiert zueinander;  $c_0$  ist reell und somit zu sich selbst konjugiert. Aus obigen Formeln folgt auch, daß umgekehrt

$$a_k = 2 \Re c_k \quad \text{und} \quad b_{\ell} = -2 \Im c_{\ell}$$

ist; man kann also leicht zwischen reeller und komplexer Darstellung umrechnen.

Damit ist auch klar, daß  $P_T(\mathbb{R}) = P_T(\mathbb{C}) \cap L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist; die reellen trigonometrischen Polynome sind also genau jene komplexe trigonometrische Polynome, die nur reelle Werte annehmen

Gefühlmäßig würde man trigonometrische Polynome wohl nicht so definieren wie in diesem Abschnitt, sondern als Polynome in  $\sin \omega t$  und  $\cos \omega t$ . Als kleine Anwendung obiger Überlegung folgt, daß dies in der Tat trigonometrische Polynome im Sinne der hießigen Definition sind, denn wegen der EULERSchen Formel ist klar, daß es komplexe

trigonometrische Polynome sind, und natürlich nehmen sie nur reelle Werte an.

**e) Harmonische Analyse periodischer Funktionen**

Die Bedingung, daß  $f(t)$  als Summe endlich vieler reiner Schwingungen gegeben sein soll, schränkt die Brauchbarkeit obiger Resultate leider erheblich ein: Ein periodischer Rechteckimpuls etwa läßt sich so nicht behandeln.

Wir können aber jedes beliebige Element von  $L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  die Skalarprodukte  $c_k = (f, e^{ik\omega t})$  berechnen und hoffen, daß sie für eine harmonische Analyse von  $f$  nützlich sind; wir definieren

**Definition:** Die FOURIER-Transformierte einer Funktion  $f \in L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist die Funktion

$$\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \left\{ \begin{aligned} k &\mapsto (f, e^{k i \omega t}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k i \omega t} dt. \end{aligned} \right.$$

(Man beachte, daß diese FOURIER-Transformierte einer *periodischen* Funktion nur auf  $\mathbb{Z}$  definiert ist: Periodische Funktionen haben kein kontinuierliches Frequenzspektrum, sondern nur Oberschwingungen zu ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz).



JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomitee bei, 1798 begleitete er Napoleon auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn dieser zum Präfekten von Isère; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

Als *komplexe FOURIER-Reihe* von  $f$  bezeichnen wir die zunächst nur formale unendliche Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{-k i \omega t},$$

als *reelle FOURIER-Reihe* von  $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  entsprechend

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell} \sin \ell\omega t$$

mit  $c_0, a_k$  und  $b_{\ell}$  wie im vorigen Abschnitt.

Natürlich ist im Augenblick weder klar, ob diese Summen überhaupt existieren, d.h. also, ob die angegebenen Reihen für alle (oder zumindest fast alle)  $t \in \mathbb{R}$  konvergieren, noch ist klar, ob sie dort, wo sie konvergieren, gegen den Funktionswert  $f(t)$  konvergieren.

**§3: Erste Beispiele von Fourier-Reihen**

Bevor wir uns solchen allgemeinen Fragen zuwenden, wollen wir zunächst anhand einiger Beispiele sehen, was wir realistischerweise erwarten können.

**a) Rechenregeln**

Als erstes wollen wir uns überlegen, wie wir bei der Berechnung von FOURIER-Koeffizienten überflüssigen Rechenaufwand vermeiden können.

Das größte Potential für Vereinfachungen bieten *Symmetrien* der Funktionen. Die beiden wichtigsten Symmetrien sind die Eigenschaften, *gerade* oder *ungerade* zu sein: Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gerade, wenn  $f(-t) = f(t)$  ist für *alle*  $t \in \mathbb{R}$ ; sie ist ungerade, wenn  $f(-t) = -f(t)$  ist für *alle*  $t \in \mathbb{R}$ . Auch Symmetrien bezüglich anderer Punkte als  $t = 0$  lassen sich gelegentlich erfolgreich ausnutzen.

*A priori* läßt sich keine Symmetrie bezüglich  $t = 0$  für die Berechnung der hier interessierenden bestimmten Integrale mit Grenzen 0 und  $T$

ausnutzen; da wir es hier aber mit periodischen Funktionen zu tun haben, sind wir nicht an diese Integrationsgrenzen gebunden:

**Lemma:** Ist die Funktion  $g$  periodisch mit Periode  $T$ , so ist für jedes  $\tau \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T g(t) dt = \int_\tau^{\tau+T} g(t) dt.$$

*Beweis:* Wir können  $\tau$  schreiben als

$$\tau = kT + \tau_0 \quad \text{mit } 0 \leq \tau_0 < T \quad \text{und } k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen der Periodizität von  $f$  ist

$$\int_\tau^{\tau+T} g(t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} g(t) dt;$$

es reicht also, den Fall  $0 \leq \tau < T$  zu betrachten. Hierfür ist

$$\begin{aligned} \int_\tau^{\tau+T} g(t) dt &= \int_\tau^T g(t) dt + \int_T^{\tau+T} g(t) dt = \int_\tau^T g(t) dt + \int_0^\tau g(t) dt \\ &= \int_0^\tau g(t) dt + \int_\tau^T g(t) dt = \int_0^\tau g(t) dt. \end{aligned}$$

■

Speziell für  $\tau = -T/2$  ist also auch

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt \quad \text{für alle } \ell \in \mathbb{N}.$$

Ist nun  $f$  eine ungerade Funktion, so sind auch alle Funktionen  $f(t) \cos k\omega t$  ungerade, d.h.

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 0 \quad \text{und} \quad a_k = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Die Funktion  $f(t) \sin \ell\omega t$  ist Produkt zweier ungerader Funktionen und somit gerade; dies liefert die Beziehung

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt,$$

die je nach der speziellen Form von  $f$  entweder nützlich ist oder auch nicht. Auf jeden Fall gibt es aber bei einer ungeraden Funktion in der FOURIER-Reihe keine Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms zu  $\cos 0 = 1$ ); nur Sinusterme können von Null verschiedene Koeffizienten haben.

Für eine gerade Funktion  $f$  ist  $f(t) \cdot \sin \ell\omega t$  als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade, d.h.

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \ell\omega t dt = 0$$

für alle  $\ell$ . Somit sind keine Sinusterme möglich; nur Kosinusterme (einschließlich des konstanten Terms) können auftreten. Weiter ist

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = 2 \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt,$$

was wiederum in Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von  $f$  entweder nützlich ist oder auch nicht.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun endgültig zu konkreten Beispielen; das erste davon ist gerade in der Digitaltechnik von großer Bedeutung:



**b) Periodische Rechteckimpulse**

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases} \quad \text{mit } f(t+T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R};$$

offensichtlich ist  $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Außerdem ist  $f$  eine ungerade Funktion, d.h. es gibt nur Sinusterme. Für diese ist

$$b_\ell = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin \ell \omega t \, dt = \frac{2}{T} \left( \int_0^{T/2} h \sin \ell \omega t \, dt - \int_{T/2}^T h \sin \ell \omega t \, dt \right),$$

aber wir können uns die Auswertung des zweiten Integrals sparen, wenn wir uns daran erinnern, daß für eine ungerade Funktion  $b_\ell$  auch berechnet werden kann als  $\frac{4}{T}$  mal dem Integral von Null bis zu rhalben Periode. Somit ist

$$b_\ell = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} h \sin \ell \omega t \, dt = \frac{4h}{T} \left( -\frac{\cos \ell \omega \frac{T}{2} - 1}{\ell \omega} \right) = \frac{4h}{T} \left( \frac{(-1)^{\ell+1} + 1}{\ell \omega} \right),$$

denn wegen  $\omega T = 2\pi$ , ist  $\omega T/2 = \pi$  und  $\cos \ell \pi = (-1)^\ell$ . Somit ist

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & \text{für gerade } \ell \\ \frac{4h}{T} \cdot \frac{2}{\ell \omega} = \frac{4h}{\pi \ell} & \text{für ungerade } \ell \end{cases}$$

und

$$S_f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell - 1)\omega t}{(2\ell - 1)}.$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt  $t$  gegen  $f(t)$  konvergiert: Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode  $T$  im Intervall  $[0, T)$  beispielsweise auch durch

$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können.  $f(t)$  und  $g(t)$  unterscheiden sich im Intervall  $[0, T]$  nur an der Stelle  $t = \frac{T}{2}$ , was bei der Berechnung der Integrale für die FOURIER-Koeffizienten keine Rolle spielt. Die beiden Funktionen haben daher dieselbe FOURIER-Reihe, und diese kann, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle  $t = \frac{T}{2}$  nicht sowohl gegen  $f(\frac{T}{2}) = -h$  und  $g(\frac{T}{2}) = h$  konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da  $\omega \frac{T}{2} = \pi$  ist und der Sinus bei allen Vielfachen von  $\pi$  verschwindet, gegen Null, d.h. den Mittelwert der beiden Funktionswerte.)

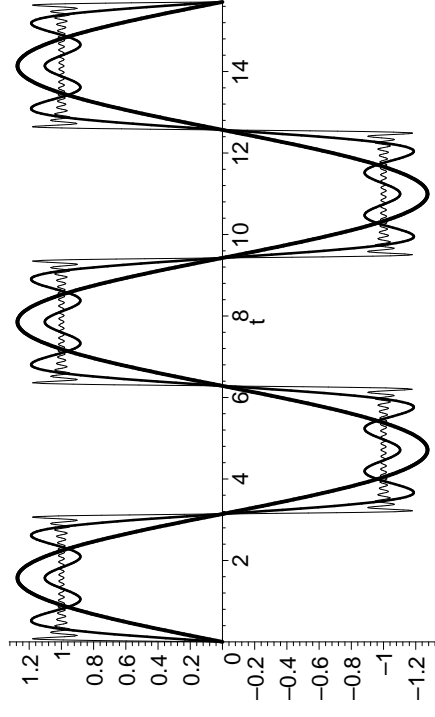


Abb. 6: FOURIER-Polynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den Sprungstellen anscheinend recht gut: Abbildung sechs zeigt die Teilsommen mit oberen Grenzen 1, 3 und 20, die die Funktion  $f$  offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und alias-Effekte der Rastergraphik.

Keine solche Störung sind allerdings die Überschwingungen an den Unstetigkeitsstellen von  $f$ : Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare Eigenschaft von FOURIER-Reihen stückweise stetiger Funktionen, mit der wir uns in Kürze näher beschäftigen werden.

Im Augenblick sei nur kurz auf eine Anwendung dieser Überschwingungen hingewiesen: Die Pixel auf einem Computerbildschirm werden durch Rechteckimpulse geschaltet, wobei aus physikalischen Gründen Oberschwingungen hoher Frequenz bei der Übertragung so stark gedämpft werden, daß für alle praktischen Zwecke nur so etwas wie eine endliche Teilsumme der FOURIER-Reihe übertragen wird.

Das tatsächliche Signal hat somit eher die Gestalt einer der Kurven aus Abbildung sechs als die eines (physikalisch nicht zu realisierenden) „echten“ Rechteckimpulses.

Die in der Abbildung zu sehenden höherfrequenten Anteile lassen sich aber problemlos mit einem geeignet eingestellten Funkempfänger auffangen und können dann zur Rekonstruktion des Bildschirminhalts verwendet werden.

Zumindest bei sensitiven Anwendungen muß ein Computer daher so abgeschirmt sein, daß von dieser Strahlungen nichts aus dem Gehäuse dringt. Bei einem Standardgehäuse hat man hier nicht die geringste Chance; Computer im Hochsicherheitsbereich brauchen ihre eigenen Spezialgehäuse.

### c) Sägezahnimpulse

Hier betrachten wir die Funktion

$$f(t) = \frac{T-t}{4} \quad \text{für } 0 < t < T \quad \text{und} \quad f(0) = 0,$$

periodisch fortgesetzt mit Periode  $T$  auf ganz  $\mathbb{R}$ .

Dies ist eine ungerade Funktion, denn für  $0 < t < T$  ist

$$f(-t) = f(-t+T) = \frac{T}{4} - \frac{(-t+T)}{2} = \frac{t}{2} - \frac{T}{4} = -f(t),$$

und  $f(0) = 0$ , wie es sich für eine ungerade Funktion gehört. Die FOURIER-Reihe von  $f$  enthält daher nur Sinusterme.

Zu deren Berechnung setzen wir wie üblich  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  und erhalten den

Koeffizienten von  $\sin \ell \omega t$  als

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \ell \omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T \left( \frac{T-t}{4} - \frac{t}{2} \right) \sin \ell \omega t \, dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{4} \int_0^T \sin \ell \omega t \, dt - \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T t \sin \ell \omega t \, dt \\ &= -\frac{1}{T} \int_0^T t \sin \ell \omega t \, dt, \end{aligned}$$

da das Integral einer Sinusfunktion über eine oder mehrere volle Perioden verschwindet. Zur weiteren Rechnung wenden wir die Methode der partiellen Integration an:

$$\int u(t) \cdot v(t) \, dt = u(t) \cdot v(t) - \int u'(t) \cdot v(t) \, dt$$

ergibt für  $u(t) = t$  und  $v(t) = \sin \ell \omega t$  mit  $v' = -\frac{1}{\ell \omega} \cos \ell \omega t$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \int t \sin \ell \omega t \, dt &= -t \frac{\cos \ell \omega t}{\ell \omega} + \frac{1}{\ell \omega} \int \cos \ell \omega t \, dt \\ &= -t \frac{\cos \ell \omega t}{\ell \omega} + \frac{1}{\ell^2 \omega^2} \sin \ell \omega t + C. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} b_\ell &= -\frac{1}{T} \left( \frac{-T \cdot \cos \ell \omega T + 0 \cdot \cos 0}{\ell \omega} + \frac{\sin \ell \omega T - \sin 0}{\ell^2 \omega^2} \right) \\ &= \frac{1}{\ell \omega} \cos(\ell \cdot 2\pi) = \frac{1}{\ell \omega} \end{aligned}$$

und

$$S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}.$$

Wieder haben wir keine Ahnung, ob und gegebenenfalls wohin diese Reihe konvergiert – außer bei den ganzzahligen Vielfachen von  $T/2$ ,

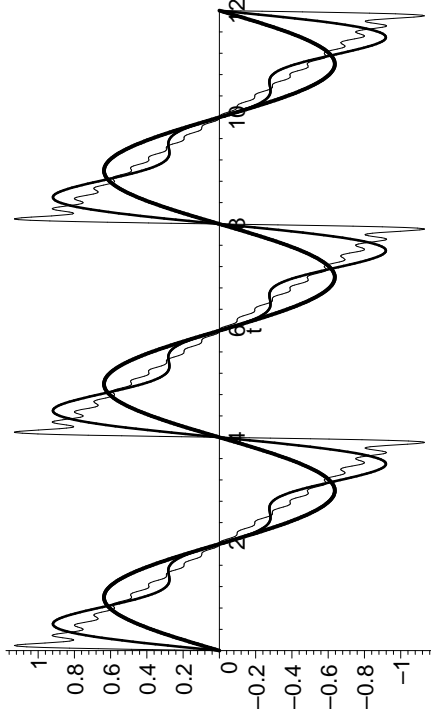


Abb. 7: FOURIERpolynome für die Sägezahnsschwingung

denn dort verschwinden alle Sinusfunktionen in den Zählern, so daß die Summe gleich null ist.

Abbildung 7 zeigt die Teilsummen mit 1, 3 und 20 Summanden für  $T = 4$ ; anscheinend nähern diese die Funktion recht gut an, allerdings gibt es wieder Überschwüngen an den Sprungstellen, denn für  $T = 4$  haben wir einen Sägezahn, der zwischen +1 und -1 hin- und herpendelt.

**d) Der Sinus hyperbolicus**

Als letztes Beispiel berechnen wir die FOURIER-Reihe von

$$f(t) = \sinh t \quad \text{für } -\pi < t \leq \pi, \text{ periodisch fortgesetzt mit Periode } 2\pi.$$

Die Koeffizienten der komplexen FOURIER-Reihe sind

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-k \cdot i\omega t} dt.$$

Man darf nun aber keineswegs den Fehler machen, daraus zu folgern,

daß

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sinh t e^{-k \cdot i\omega t} dt$$

? ? ?  
? ? ?

sei, denn  $f(t)$  stimmt *nur* im Intervall  $(-\pi, \pi]$  mit  $\sinh t$  überein; für  $\pi < t \leq 2\pi$  ist  $f(t) = \sinh(t - 2\pi)$ . Falls wir die mit Fragezeichen versehene Formel benutzen, berechnen wir tatsächlich die FOURIER-Reihe von

$g(t) = \sinh t$  für  $0 < t \leq 2\pi$ , periodisch fortgesetzt mit Periode  $2\pi$ , und das ist, wie die Abbildungen acht und neun zeigen, eine völlig andere Funktion:  $f$  ist eine ungerade Funktion mit einem Wertebereich, der durch die beiden Extrema  $\pm \sinh \pi \approx \pm 11,54873936$  begrenzt ist,  $g$  dagegen eine Funktion mit Werten zwischen null und  $\sinh 2\pi \approx 267,7448943$ , die weder gerade noch ungerade ist.

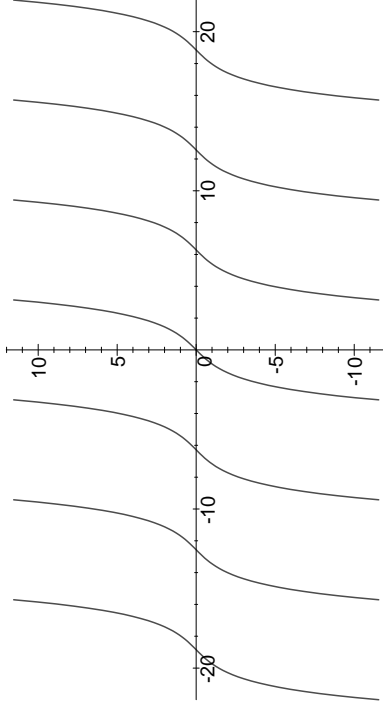


Abb. 8: Die Funktion  $f(t)$

Wie groß der Unterschied zwischen den beiden Funktionen wirklich ist, sieht man am besten, wenn man sie wie in Abbildung zehn in einem

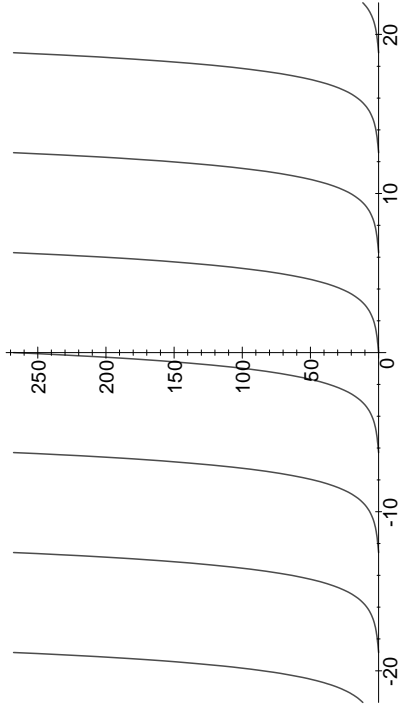


Abb. 9: Die Funktion  $g(t)$

gemeinsamen Koordinatensystem abbildet: Die fett gezeichneten Kurvenstücke sind beiden Funktionen gemeinsam, und dort, wo  $f$  und  $g$  nicht übereinstimmen, ist  $f$  durch eine ausgezogene,  $g$  durch eine gestrichelte Kurve dargestellt.

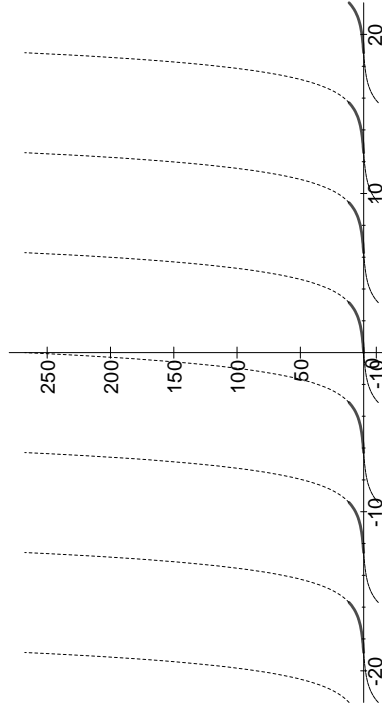


Abb. 10:  $f(t)$  und  $g(t)$  im gleichen Koordinatensystem

Wenn wir mit einer Integration von 0 bis  $2\pi$  arbeiten wollen, müssen

wir also das Integral in zwei Teilintegrale aufteilen:

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \int_0^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sinh(t - 2\pi) e^{-k \cdot it} dt$$

Zum Glück wissen wir aber aus §3a), daß wir bei einer periodischen Form über jedes beliebige Periodenintervall integrieren dürfen, ohne etwas am Ergebnis zu verändern: Das wurde dort zwar nur für reelle Integrale gezeigt, aber da ein komplexes Integral auf zwei reelle zurückgeführt werden kann, gilt es auch dafür. Also ist auch

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t e^{-k \cdot it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^t - e^{-t}}{2} e^{-k \cdot it} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( e^{t(1-ki)} - e^{-t(1+ki)} \right) dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{t(1-ki)}}{1-ki} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{-t(1+ki)}}{-(1+ki)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^{\pi} e^{-ki\pi} - e^{-\pi} e^{ki\pi}}{1-ki} + \frac{e^{-\pi} e^{-ki\pi} - e^{\pi} e^{ki\pi}}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{4\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \left( \frac{1}{1-ki} - \frac{1}{1+ki} \right) \\ &= \frac{(-1)^k \sinh \pi (1+ki) - (1-ki) \sinh \pi}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^k \cdot ik}{k^2 + 1} \end{aligned}$$

Die komplexe FOURIER-Reihe ist somit

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1} e^{ikt}$$

Da der Koeffizient von  $e^{ikt}$  eine ungerade Funktion von  $k$  ist, fallen beim Einsetzen von  $e^{ikt} = \cos kt + i \sin kt$  die Kosinusterme weg, während

sich die Sinusterme zu  $k$  und zu  $-k$  gegenseitig verdoppeln; wir erhalten also die reelle Form

$$S_f(t) = i \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1} i \sin kt = -2 \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 + 1} \sin kt,$$

die gleichzeitig die reelle FOURIER-Reihe von  $f$  ist.

Bei der direkten Berechnung über die Koeffizientenformeln für die reelle Reihe wären die Vorüberlegungen aus §3a) ebenfalls nützlich gewesen: Da  $f$  eine ungerade Funktion ist, treten nur Sinusterme auf, und deren Koeffizienten sind

$$b_\ell = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt.$$

Der Integrand hier ist in Exponentialform gleich

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^{i\ell t} - e^{-i\ell t}}{2i} = \frac{4i}{4i} \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{t(1-i\ell)}}{4i} - \frac{4i}{4i} \frac{e^{-t(1+i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i},$$

und die Stammfunktion des Summanden

$$\frac{e^{\pm t(1 \pm i\ell)}}{4i} \quad \text{ist} \quad \pm 4i(1 \pm i\ell).$$

Die Stammfunktion des Integranden ist daher

$$\begin{aligned} & \frac{e^{t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)} - \frac{e^{-t(1-i\ell)}}{-4i(1-i\ell)} + \frac{e^{-t(1+i\ell)}}{-4i(1+i\ell)} \\ &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4i(1+i\ell)} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4i(1-i\ell)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad b_\ell &= \frac{e^{t(1+i\ell)} - e^{-t(1+i\ell)}}{4\pi i(1+i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{e^{t(1-i\ell)} - e^{-t(1-i\ell)}}{4\pi i(1-i\ell)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(e^{\pi(1+i\ell)} - e^{-\pi(1+i\ell)}) - (e^{-\pi(1+i\ell)} - e^{\pi(1+i\ell)})}{4\pi i(1+i\ell)} \\ &\quad - \frac{(e^{\pi(1-i\ell)} - e^{-\pi(1-i\ell)}) - (e^{-\pi(1-i\ell)} - e^{\pi(1-i\ell)})}{4\pi i(1-i\ell)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1+i\ell)} - \frac{(-1)^\ell (e^\pi - e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^\pi)}{4\pi i(1-i\ell)} \\ &= (-1)^\ell \left( \frac{\sinh \pi}{\pi i(1+i\ell)} - \frac{\sinh \pi}{\pi i(1-i\ell)} \right) \\ &= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \left( \frac{1}{1+i\ell} - \frac{1}{1-i\ell} \right) \\ &= (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi i} \frac{\pi(1-i\ell) - \pi(1+i\ell)}{(1+i\ell)(1-i\ell)} = (-1)^\ell \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{-2\ell}{\ell^2 + 1}. \end{aligned}$$

Das sind, abgesehen von der anderen Bezeichnung für den Index, genau die oben berechneten Koeffizienten.

Wir können das Integral auch ganz ohne komplexe Zahlen ausrechnen: Zweimalige Anwendung der Regel für partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} b_\ell &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt = \frac{1}{\pi} \cosh t \sin \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{\ell}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos \ell t dt \\ &= -\frac{\ell}{\pi} \left( \sinh t \cos \ell t \Big|_{-\pi}^{\pi} + \ell \int_{-\pi}^{\pi} \sinh t \sin \ell t dt \right) \\ &= -\frac{\ell}{\pi} \left( (-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi + \ell \pi b_\ell \right) = -\frac{\ell}{\pi} (-1)^\ell \cdot 2 \sinh \pi - \ell^2 b_\ell. \end{aligned}$$

Somit ist

$$(1 + \ell^2) b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} (-1)^\ell \ell \quad \text{und} \quad b_\ell = -\frac{2 \sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^\ell \ell}{\ell^2 + 1}.$$

Damit haben wir die FOURIER-Reihe von  $f$  auf drei verschiedene Weisen berechnet; das Ergebnis war natürlich in allen drei Fällen dasselbe, der Weg dorthin aber recht verschieden. Es hängt sowohl vom Problem als auch von persönlichen Vorlieben ab, welchen Rechengang man vorzieht; gerade bei Funktionen, bei denen die FOURIER-Reihe sowohl Sinus- als auch Kosinusterme enthält, wird aber oft der Weg über die komplexe FOURIER-Reihe am schnellsten sein, da man dann nur ein Integral berechnen muß.

### e) Konvergenz der berechneten Reihen

Als nächstes wollen, zunächst für Sägezahnswingungen, die Konvergenz der FOURIER-Reihe untersuchen. Für  $t = 0$  und damit auch für alle Vielfachen von  $T$  sind alle Summanden null, die Reihe konvergiert also gegen null.

Für  $t$  aus dem offenen Intervall  $(0, T)$  können wir folgendermaßen vorgehen: Die Summanden  $\frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$  sind Stammfunktionen der Funktionen  $\cos \ell \omega t$ ; also ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} \quad \text{Stammfunktion von} \quad \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega t.$$

Auch die Funktion  $f$  läßt sich im Intervall  $(0, T)$  als Stammfunktion schreiben: Dort ist

$$f(t) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} = \int_{T/2}^t \left( \frac{-1}{2} \right) d\tau,$$

und da auch

$$\int_{T/2}^t \cos \ell \omega \tau d\tau = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \omega T/2}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t - \sin \ell \pi}{\ell \omega} = \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

ist, erhalten wir die Differenz zwischen der  $N$ -ten Teilsumme und  $f(t)$  als Integral:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) &= \int_{T/2}^t \left( \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau - \left( \frac{-1}{2} \right) \right) d\tau \\ &= \int_{T/2}^t \left( \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau \right) d\tau. \end{aligned}$$

Diesen Integranden können wir über die komplexe Darstellung des Kosinus ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau &= \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \frac{e^{\ell \cdot i \omega \tau} + e^{-\ell \cdot i \omega \tau}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=-N}^N e^{\ell \cdot i \omega \tau} \\ &= \frac{1}{2} e^{-N \cdot i \omega \tau} \sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell \cdot i \omega \tau} \end{aligned}$$

ist im wesentlichen eine geometrische Reihe, und die läßt sich bekanntlich leicht ausrechnen: Da

$$(1-q) \sum_{j=0}^r q^j = \sum_{j=0}^r q^j - \sum_{j=1}^{r+1} q^j = 1 - q^{r+1}$$

ist, folgt für  $q \neq 1$  die Formel

$$\sum_{j=0}^r q^j = \frac{1 - q^{r+1}}{1 - q}.$$

In unserem Fall ist  $q = e^{i \omega \tau}$  und somit

$$\sum_{\ell=0}^{2N} e^{\ell \cdot i \omega \tau} = \frac{1 - e^{(2N+1) \cdot i \omega \tau}}{1 - e^{i \omega \tau}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\ell=1}^N \cos \ell \omega \tau &= \frac{1}{2} e^{-N \cdot i \omega \tau} \frac{1 - e^{(2N+1) \cdot i \omega \tau}}{1 - e^{i \omega \tau}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{-N \cdot i \omega \tau} - e^{(N+1) \cdot i \omega \tau}}{1 - e^{i \omega \tau}}. \end{aligned}$$

Erweiterung des Bruchs mit  $e^{\frac{1}{2} \cdot i \omega \tau}$  führt auf die symmetrischere Form

$$\frac{1}{2} \frac{e^{-(N+\frac{1}{2}) \cdot i \omega \tau} - e^{(N+\frac{1}{2}) \cdot i \omega \tau}}{e^{-\frac{1}{2} \cdot i \omega \tau} - e^{\frac{1}{2} \cdot i \omega \tau}} = \frac{\sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}}.$$

Damit ist

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) = \int_{T/2}^t \frac{\sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} d\tau.$$

Die FOURIER-Reihe konvergiert genau dann im Punkt  $t$  gegen  $f(t)$ , wenn dieses Integral für  $N \rightarrow \infty$  gegen null geht.

Die Suche nach einer Stammfunktion sieht ziemlich hoffnungslos aus; trotzdem hilft partielle Integration zu einem besseren Verständnis des Integrals. Wir wenden die Regel an mit

$$u(\tau) = \frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \quad \text{und} \quad \dot{v}(\tau) = \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau,$$

d.h.

$$v(\tau) = -\frac{\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left( N + \frac{1}{2} \right) \omega};$$

das Integral wird zu

$$-\frac{\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega t}{\left( 2N + 1 \right) \omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \int_{\pi/2}^t \frac{\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left( N + \frac{1}{2} \right) \omega} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \right) d\tau,$$

denn an der unteren Grenze ist

$$\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \frac{T}{2} = \cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \pi = 0.$$

Auf das noch verbleibende Integral wenden wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung in seiner allgemeineren Form an:

Für eine im Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $v$  und eine in  $[a, b]$  integrierbare Funktion  $w$  gibt es einen Wert  $\zeta \in [a, b]$ , so daß gilt

$$\int_a^b v(\tau) w(\tau) d\tau = v(\zeta) \int_a^b w(\tau) d\tau.$$

Für alle, die den Satz nicht in dieser Form kennen, sei der Beweis kurz nachgetragen: Als stetige Funktion nimmt  $v$  im Intervall  $[a, b]$  sowohl seinen Maximalwert  $v_{\max}$  als auch seinen Minimalwert  $v_{\min}$  an. Der Wert des linksstehenden Integrals liegt dann zwischen

$$v_{\min} \int_a^b w(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad v_{\max} \int_a^b w(\tau) d\tau,$$

es gibt also einen Wert  $v_0 \in [v_{\min}, v_{\max}]$ , so daß

$$\int_a^b v(\tau) w(\tau) d\tau = v_0 \int_a^b w(\tau) d\tau$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt  $v$  als stetige Funktion diesen Wert  $v_0$  irgendwo an, es gibt also ein  $\zeta \in [a, b]$ , so daß  $v(\zeta) = v_0$  ist. Damit ist der Satz bewiesen. ■

Hier setzen wir

$$v(\tau) = \frac{\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left( N + \frac{1}{2} \right) \omega} \quad \text{und} \quad w(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \right);$$

wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\pi/2}^t \frac{\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \tau}{\left( N + \frac{1}{2} \right) \omega} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{2 \sin \frac{\omega \tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \zeta}{\left( 2N + 1 \right) \omega} \int_{\pi/2}^t \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\sin \frac{\omega \tau}{2}} \right) d\tau \\ &= \frac{\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \zeta}{\left( 2N + 1 \right) \omega} \left( \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 \right), \end{aligned}$$

denn  $\sin \frac{\omega T}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ . Also ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) \\ &= -\frac{\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega t}{\left( 2N + 1 \right) \omega \sin \frac{\omega t}{2}} + \frac{\cos \left( N + \frac{1}{2} \right) \omega \zeta}{\left( 2N + 1 \right) \omega} \left( \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Für  $0 < t < T$  ist  $1 / \sin \frac{\omega t}{2} \geq 1$ , also

$$0 \leq \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}} - 1 < \frac{1}{\sin \frac{\omega t}{2}},$$

und da der Kosinus nur Werte zwischen  $-1$  und  $+1$  annimmt, folgt, daß

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega \sin \frac{\omega t}{2}}$$

für alle  $t$  mit  $0 < t < T$ .

Für  $N \rightarrow \infty$  geht die rechte Seite gegen null, also ist

$$S_f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} = f(t)$$

für alle  $t$  mit  $0 < t < T$ . Für  $t = 0$  stehen links und rechts Nullen, so daß die Gleichung auch dort gilt, und da beide Seiten periodisch sind mit Periode  $T$ , gilt sie tatsächlich für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Auf abgeschlossenen Teilintervallen von  $(0, T)$  ist die Konvergenz sogar gleichmäßig, denn im Intervall  $[\varepsilon, T - \varepsilon]$  ist  $\sin \frac{\omega t}{2} \geq \sin \frac{\omega \varepsilon}{2}$ , d.h.

$$\left| \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} - f(t) \right| \leq \frac{2}{(2N+1)\omega \sin \frac{\omega \varepsilon}{2}}$$

für alle  $t \in [\varepsilon, T - \varepsilon]$ .

Mit diesem Resultat können wir nun auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe für Rechteckimpulse genauer untersuchen:

Für  $0 < t < \frac{T}{2}$  liegt auch  $\frac{T}{2} - t$  im Intervall  $(0, T)$ , d.h. mit der gerade betrachteten Funktion  $f$  für Sägezahnimpulse ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{t}{4} + \frac{T}{2} = \frac{3T}{4}.$$

Für  $\frac{T}{2} < t < T$  liegt  $\frac{T}{2} - t$  im Intervall  $(-T, 0)$ , d.h.  $\frac{3T}{2} - t$  liegt in  $(0, T)$  und

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = f(t) + f\left(\frac{3T}{2} - t\right) = \frac{T}{4} - \frac{t}{2} + \frac{T}{4} - \frac{3T}{4} + \frac{t}{2} = -\frac{T}{4}.$$

Für  $t = 0$  sowie auch für  $t = \frac{T}{2}$  ist  $f(t) + f(\frac{T}{2} - t) = 0$ , insgesamt ist also

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}, \end{cases}$$

periodisch fortgesetzt mit Periode  $T$ . Somit beschreibt  $f(t) + f(\frac{T}{2} - t)$  einen Rechteckimpuls.

Da  $S_f(t) = f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist

$$f(t) + f\left(\frac{T}{2} - t\right) = S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right)$$

und

$$\begin{aligned} S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega \left(\frac{T}{2} - t\right)}{\ell \omega} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\ell \omega T}{2} - \ell \omega t\right)}{\ell \omega} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(\ell \pi - \ell \omega t)}{\ell \omega}. \end{aligned}$$

Für gerades  $\ell$  ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$$

und für ungerades  $\ell$  ist

$$\sin(\ell \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin(x - \pi) = \sin x,$$

denn bei Verschiebung um  $\pi$  wird der  $\sin x$  zu  $-\sin x$ . Damit folgt

$$S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}$$

und

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega}.$$

Für endliche Teilsummen heben sich bei dieser Addition einfach die Terme mit geraden Indizes weg, während die mit ungeradem Index



verdoppelt werden, d.h.

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} + \sum_{\ell=1}^N (-1)^{\ell+1} \frac{\sin \ell \omega t}{\ell \omega} = 2 \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega}.$$

Durch Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  folgt

$$S_f(t) + S_f\left(\frac{T}{2} - t\right) = 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega},$$

d.h.

$$2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega} = \begin{cases} \frac{T}{4} & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -\frac{T}{4} & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Multiplikation beider Seiten mit  $4h/T$  führt wegen

$$\frac{8h}{T\omega} = \frac{8h}{2\pi} = \frac{4h}{\pi}$$

zur Formel

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)} = \begin{cases} h & \text{für } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \\ 0 & \text{für } t = 0, \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Damit ist also auch die Konvergenz der FOURIER-Reihe der Rechteckschwingung geklärt. Als kleine Anwendung können wir den Wert  $t = \frac{T}{4}$  einsetzen; für diesen ist

$$\sin(2\ell-1)\omega \frac{T}{4} = \sin(2\ell-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{\ell+1},$$

d.h.

$$\frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)} = h$$

und somit

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell-1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

### f) Das Gibbs-Phänomen

Wie in den Abbildungen sechs und sieben zu sehen ist, zeigen zumindest die dort dargestellten FOURIER-Polynome Überschwüngen an den Sprungstellen. Wir wollen uns davon überzeugen, daß diese auch bei FOURIER-Polynome mit beliebig vielen Summanden nicht verschwinden.

Beginnen wir mit den Rechteckschwingungen! Wir versuchen zunächst, die Summe

$$S_N(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)}$$

in etwas kompakterer Form darzustellen. Wegen

$$\frac{\sin(2\ell-1)\omega t}{(2\ell-1)\omega} = \int_0^t \cos(2\ell-1)\omega \tau \, d\tau$$

ist

$$\frac{S_N(t)}{\omega} = \frac{4h}{\pi} \sum_{\ell=1}^N \int_0^t \cos(2\ell-1)\omega \tau \, d\tau = \frac{4h}{\pi} \int_0^t \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell-1)\omega \tau \, d\tau,$$

und diesen letzten Integranden können wir über seine komplexe Darstellung ausrechnen. Um den Nenner zwei zu eliminieren, berechnen wir den zweifachen Wert

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\ell=1}^N \cos(2\ell-1)\omega \tau &= \sum_{\ell=1}^N (e^{(2\ell-1)i\omega \tau} + e^{-(2\ell-1)i\omega \tau}) \\ &= \sum_{\ell=-(N-1)}^{N-1} e^{(2\ell-1)i\omega \tau} = e^{(-2N+1)i\omega \tau} \sum_{\ell=0}^{2N-1} e^{2\ell i\omega \tau}. \end{aligned}$$

Letztere Summe ist eine geometrische Reihe mit Quotient  $e^{2i\omega \tau}$ ; nach der Summenformel hat sie den Wert

$$\frac{1 - e^{4N i\omega \tau}}{1 - e^{2i\omega \tau}}.$$

Die gesuchte Summe ist also

$$\begin{aligned} e^{-2N \cdot i\omega\tau} \frac{1 - e^{4N \cdot i\omega\tau}}{1 - e^{2i\omega\tau}} &= \frac{e^{-2N \cdot i\omega\tau} (1 - e^{4N \cdot i\omega\tau})}{e^{-i\omega\tau} (1 - e^{2i\omega\tau})} \\ &= \frac{e^{-2N \cdot i\omega\tau} - e^{2N \cdot i\omega\tau}}{e^{-i\omega\tau} - e^{i\omega\tau}} = \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} \end{aligned}$$

und

$$S_N = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau.$$

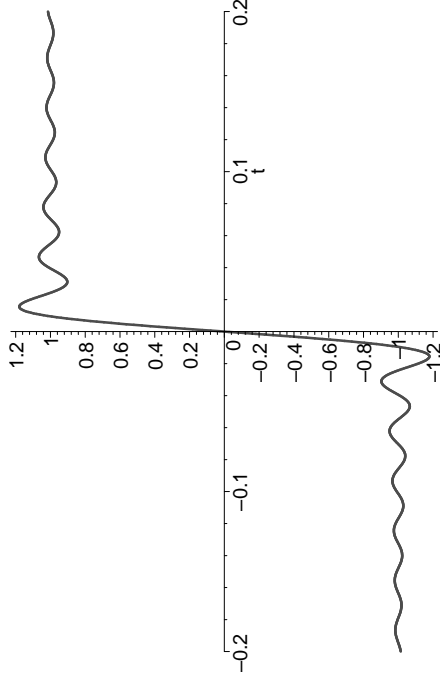


Abb. 11: Das GIBBSphänomen in Grobtaufnahme

Als nächstes suchen wir nach dem Betrag der Überschwängung. Abbildung 11 zeigt diese in Grobaufnahme für  $S_{100}(t)$ ; wir wollen das Maximum unmittelbar nach der Sprungstelle bestimmen und das Integral dort auswerten.

Im Maximum verschwindet die Ableitung des Integrals, also der Integrand

$$\frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau}.$$

Bei der ersten positiven Nullstelle  $t_N$  ist  $2N\omega t_N = \pi$  die erste positive Nullstelle des Sinus, d.h.

$$t_N = \frac{\pi}{2N\omega}.$$

Insbesondere rückt  $t_0$  mit wachsendem  $N$  immer näher zur Null; je größer  $N$  wird, desto enger lokalisiert wird die Überschwängung.

Mit der Substitution  $u = 2N\omega\tau$  wird

$$S_N(t_N) = \frac{2h\omega}{\pi} \int_0^{t_N} \frac{\sin 2N\omega\tau}{\sin \omega\tau} d\tau = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \sin \frac{u}{2N}} du.$$

Für große Werte von  $N$  ist das Argument des Sinus im Nenner des Integranden sehr klein; wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir den Sinus durch sein Argument annähern, und für  $N \rightarrow \infty$  geht der Fehler gegen Null. Somit ist

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{2N \cdot \frac{u}{2N}} du = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

Die Stammfunktion von  $\frac{\sin u}{u}$  ist nicht in geschlossener Form durch trigonometrische Funktionen, Logarithmen, Exponentialfunktionen und ähnliches ausdrückbar, sie ist aber sehr wichtig und hat daher einen eigenen Namen:

**Definition:** Die Funktion

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

heißt *Integralsinus* oder *sinus integralis*.

Der Integralsinus existiert für beliebige reelle Argumente  $t$ , denn die Nullstelle des Integranden bei  $u = 0$  ist harmlos, da

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

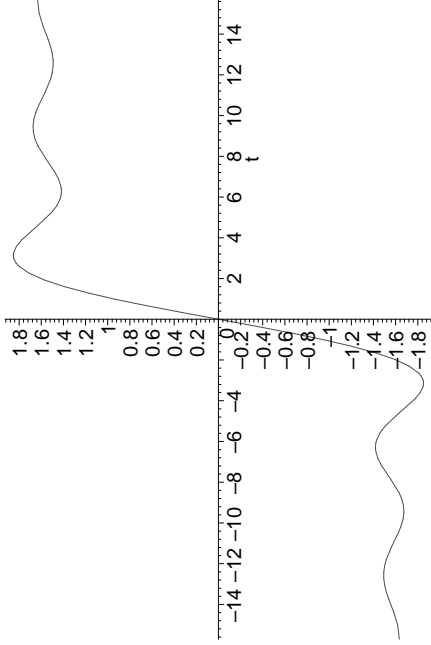


Abb. 12: Der Integralsinus

ist. Wie Abbildung zwölf zeigt, konvergiert er für  $t \rightarrow \pm\infty$  relativ schnell gegen einen konstanten Wert. Wie am Ende von §1 erwähnt wurde, kann man mit Hilfe des Residuensatzes zeigen, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \pi$$

ist; im Skriptum von 2005 ist diese Rechnung auch nachzulesen. Da der Integrand gerade ist, ist das Integral von Null bis unendlich die Hälfte davon, also  $\pi/2$ .

Der uns interessierende Wert des Integralsinus an der Stelle  $\pi$  läßt sich nicht in einfacher Weise durch bekannte Konstanten ausdrücken und muß daher numerisch berechnet werden; man erhält

$$\text{Si}(\pi) \approx 1,8519305198 \quad \text{und} \quad \frac{2h}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1,1789797445 \cdot h.$$

Die FOURIER-Polynome überschwingen also auch für  $N \rightarrow \infty$  den Funktionswert noch um knapp 18%.

Ersetzen wir die Funktion  $f$  durch  $f+c$  für irgendeine Konstante  $c$ , ändert sich nur der konstante Term der FOURIER-Reihe; das GIBBS-Phänomen

bleibt auch in seiner Größe unverändert. Verändert wird dagegen der Funktionswert; es ist daher besser, die Überschwingung auf die unverändert gebliebene Sprunghöhe zu beziehen. Wir sollten daher besser sagen, daß die Überschwingung knapp neun Prozent der Sprunghöhe ausmacht.

Auch beim Sägezahn können wir die Überschwingung explizit berechnen: Aus Abschnitt e) wissen wir bereits, daß hier

$$\sum_{\ell=1}^N \frac{\sin \ell\omega t}{\ell\omega} - f(t) = \int_{\pi/2}^t \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega\tau}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} d\tau$$

ist. Auch die Ableitung dieser Funktion ist wieder der Integrand; für ihre erste positive Nullstelle  $t_N$  ist

$$\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega t_N = \pi, \quad \text{d.h.} \quad t_N = \frac{\pi}{\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega} = \frac{T}{2N+1}.$$

Mit der Substitution  $u = \left(N + \frac{1}{2}\right)\omega\tau$  wird

$$\int_{T/2}^{t_N} \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\omega\tau}{2 \sin \frac{\omega\tau}{2}} d\tau = \int_{(N+\frac{1}{2})\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{(2N+1)\omega \sin \frac{u}{2N+1}} du.$$

Wieder können wir den Sinus im Nenner für große  $N$  durch sein Argument ersetzen und erhalten somit als Limes für  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(N+\frac{1}{2})\pi}^{\pi} \frac{\sin u}{\omega u} du &= \frac{1}{\omega} \left( \text{Si}(\pi) - \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Si}(t) \right) = \frac{\text{Si}(\pi) - \frac{\pi}{2}}{\omega} \\ &= \frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) - \frac{T}{4}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $T/4$  der Wert, der überschungen wird, der Maximalwert des FOURIER-Polynoms geht also für  $N \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi)$ . Dividiert man dies durch  $\frac{T}{4}$ , ergibt sich wieder der Quotient

$$\frac{T}{2\pi} \text{Si}(\pi) \cdot \frac{4}{T} = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\pi),$$

auch hier gibt es also wieder eine Überschwingung um knapp 18% des Funktionswerts oder knapp neun Prozent der Sprunghöhe.

Dies ist kein Zufall: Wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, tritt an *jeder* Unstetigkeitsstelle einer Funktion das GIBBS-Phänomen ein, wonach die FOURIER-Polynome den Sprung um knapp neun Prozent überschwingen.



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903) promovierte 1863 an der amerikanischen Yale-Universität mit einer Arbeit über Zahnradgetriebe; die erste amerikanische Dissertation auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Danach unterrichtete er in Yale Latein und Naturphilosophie, bis er 1866 nach Europa fuhr, wo er 1868/1869 in Heidelberg bei KIRCHHOFF und HELMHOLTZ studierte. 1871 wurde er in Yale Professor für mathematische Physik, 1873 publizierte er seine erste Arbeit, die sich, wie viele spätere, mit Thermodynamik befaßte. Sehr einflußreich waren auch seine Arbeiten zur elektromagnetischen Theorie des Lichts und zur Vektoranalysis.

### g) Die Besselsche Ungleichung

In einem EUKLIDISCHEN oder HERMITESCHEN Vektorraum  $V$  mit (HERMITESCHEM) Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  gilt für jede Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$ , daß für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \vec{b} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \mu_{\vec{b}} \vec{b}$$

das Skalarprodukt berechnet werden kann als

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \overline{\mu_{\vec{b}}},$$

wobei wegen der Basiseigenschaft von  $\mathcal{B}$  natürlich wieder alle Summen endlich sind, auch wenn die Basis  $\mathcal{B}$  unendlich sein sollte. Insbesondere ist

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} \lambda_{\vec{b}} \overline{\lambda_{\vec{b}}} = \sum_{\vec{b} \in \mathcal{B}} |\lambda_{\vec{b}}|^2.$$

Für trigonometrische Polynome

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k \cdot i \omega t} \in \mathbf{P}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

ist daher  $(f, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$ , wobei auch hier wieder, da es sich um ein trigonometrisches *Polynom* handelt, in beiden unendlichen Summen nur endlich viele Summanden ungleich null sind.

$L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ist zwar kein EUKLIDISCHER Vektorraum und  $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  kein HERMITESCHER, aber wir hoffen doch, daß sich die trigonometrischen Funktionen bzw. komplexen Exponentialfunktionen wenigstens so ähnlich verhalten wie eine Orthonormalbasis; vielleicht sollte auch gelten, daß für eine Funktion  $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  mit FOURIER-Reihe

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{k \cdot i \omega t} \quad \text{gilt} \quad (f, f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2,$$

obwohl *hier* wirklich unendliche Summen stehen können.

Bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen wird diese Frage eine wesentliche Rolle spielen; als ersten Einstieg dazu beweisen wir die BESSELSCHE Ungleichung:

**Lemma:** Für die FOURIER-Koeffizienten  $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k \cdot i \omega t} dt$  einer Funktion  $f \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt;$$

insbesondere konvergiert die linke Summe also.

**Beweis:** Die rechte Seite der Ungleichung ist gerade das HERMITESCHE Produkt  $(f, f)$ , und auch die FOURIER-Koeffizienten lassen sich als Produkte

$$c_k = (f, e^{k \cdot i \omega t})$$

schreiben. Wir wollen noch einige weitere Produkte ausrechnen.

Zunächst definieren wir die Teilsumme

$$S_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i \omega t}.$$

Dies ist ein trigonometrisches Polynom, und wir wissen daher schon aus §2a), daß

$$(S_N, S_N) = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2$$

ist.

Als nächstes betrachten wir das Produkt

$$(f - S_N, f - S_N) = (f, f) - (S_N, f) - (f, S_N) + (S_N, S_N).$$

Auch wenn das HERMITESCHE Produkt auf  $L_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  nicht positiv definit ist, wissen wir doch, daß die linke (und damit auch die rechte) Seite zumindest nichtnegativ ist.

Wegen der Linearität des HERMITESCHEN Produkts im ersten Argument ist weiter

$$\begin{aligned} (S_N, f) &= \left( \sum_{k=-N}^N c_k e^{k \cdot i \omega t}, f \right) = \sum_{k=-N}^N c_k \left( e^{k \cdot i \omega t}, f \right) \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k \overline{(f, e^{k \cdot i \omega t})} = \sum_{k=-N}^N c_k \overline{c_k} = \sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \\ &= (S_N, S_N), \end{aligned}$$

und da dies eine reelle Zahl ist, folgt auch

$$(f, S_N) = \overline{(S_N, f)} = (S_N, f) = (S_N, S_N).$$

Fassen wir alles zusammen, ist also

$$0 \leq (f - S_N, f - S_N) = (f, f) - (S_N, S_N)$$

und damit

$$(S_N, S_N) \leq (f, f) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ausgeschrieben wird das zu

$$\sum_{k=-N}^N |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und der Grenzübergang  $N \rightarrow \infty$  führt zur gewünschten Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt,$$

wie behauptet. ■



FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784–1846) verließ die Schule schon im Alter von 14 Jahren und wurde Lehrling eines Handelshauses. Dessen Überseehandel veranlaßte ihn zur Beschäftigung mit Geographie, Spanisch und Englisch und schließlich (für die Navigation) mit Astronomie. Nachdem er 1804 die Bahn des HALLEYSchen Kometen berechnet hatte, bekam er 1806 eine Stelle als Astronom eines privaten Observatoriums. Seine Beiträge zur Mathematik entstanden aus seinen astronomischen Berechnungen. 1809 wurde er zum Direktor des Königsberger Observatoriums und zum Professor der Astronomie ernannt.

Aufgrund der Beziehungen zwischen reellen und komplexen FOURIER-Reihen (für die genau dieselben Formeln gelten, die wir in Abschnitt d) für trigonometrische Polynome hergeleitet haben) folgt, daß für die reelle FOURIER-Reihe einer reellwertigen Funktion gilt

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leq \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt.$$

Insbesondere konvergieren also auch die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \quad \text{und} \quad \sum_{\ell=1}^{\infty} b_{\ell}^2.$$