WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

9. Januar 2007

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = i$!

Lösung: Da $i = e^{\pi i/2}$, ist $z = e^{\pi i/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ eine Lösung. (Die andere ist natürlich $-z$.)
Alternativ: Schreibe $z = x + iy$. Dann ist $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = i$ genau dann, wenn $x = \pm y$ und $2xy = 1$ ist. Also muß $x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sein.

2) Bestimmen Sie die reelle FOURIER-Reihe von $f(t) = \sin^3 t$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\sin^3 t &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{-8i} = -\frac{1}{4}(\sin 3t - 3\sin t)\\ &= \frac{3\sin t}{4} - \frac{\sin 3t}{4}\,.\end{aligned}$$

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Falsch,* denn offensichtlich ist die Eins ihr einziger Eigenwert, abe der Eigenraum wird vom dritten Einheitsvektor aufgespannt und ist dahe nur eindimensional

4) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, so auch e^A.

Lösung: *Richtig,* denn ist $D = B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix, so auch $e^D = B^{-1}e^AB$.

5) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \arctan y(t)$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

Lösung: *Richtig:* Die Ableitung $\frac{1}{1+y^2}$ von $\arctan y$ ist beschränkt; es gibt also eine LIPSCHITZ-Konstante und der Satz von PICARD-LINDELÖF ist anwendbar.

6) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - y(t)^2 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t)\,!$$

Lösung: (x, y) ist genau dann ein Gleichgewichtspunkt, wenn $x^2 - y^2 = 0$ und $x + 2y = 0$ ist. Also muß $x = \pm y$ und $\pm y + 2y = 0$ sein, d.h. $x = y = 0$. Somit ist der Nullpunkt der einzige Fixpunkt.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Für welche(s) der folgenden Integrale liefert der Residuensatz den Wert?

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+9}, \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+64}, \qquad I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4-64}$$

Lösung: Für I_1 und I_3 ist diese Methode anwendbar, denn der Grad des Zählers ist um mindestens eins kleiner als der des Nenners und keine Nullstelle des Nenners liegt auf der reellen Achse. Bei I_2 ist der Nennergrad nur um eins größer als der Zählergrad; hier läßt sich der Residuensatz nicht anwenden, da das Integral über den Halbkreis nicht verschwinden muß. Bei I_4 läßt er sich nicht anwenden, da der Integrand reelle Nullstellen hat, nämlich ± 4.

b) Berechnen Sie *eines* der Integrale aus *a)* über den Residuensatz!

Lösung: Nach *a)* kommen I_1 und I_3 in Frage; offensichtlich ist I_1 das einfachere der beiden. Der Nenner des Integranden ist

$$x^2+4x+8 = (x+2)^2+4\,,$$

hat also die Nullstellen $-2 \pm 2i$. Nach dem Residuensatz, so wie wir ihn in der Vorlesung angewendet haben, ist somit

$$I_1 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+2i} \frac{1}{z^2+4z+8}\,.$$

Da die beiden Nennernullstellen einfach sind, ist

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=-2+2+} \frac{1}{z^2+4z+8} &= \lim_{z\to -2+2i} \frac{z-(-2+2i)}{z^2+4z+8} = \lim_{z\to -2+2i} \frac{1}{z-(-2-2i)} \\ &= \frac{1}{-2+2i+2+2i} = \frac{1}{4i}\,.\end{aligned}$$

Somit ist $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}\,.$

c) Was können Sie über die anderen drei Integrale sagen?

Lösung: Bei I_2 ist der Zähler des Integranden die Ableitung des Nenners, also ist dessen Logarithmus $\log(x^2+9)$ eine Stammfunktion. Läßt man in

$$\int_a^b \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \ln(a^2+9) - \ln(b^2+9) = \ln\frac{a^2+9}{b^2+9}$$

a und b unabhängig voneinander gegen $\pm\infty$ gehen, existiert kein Grenzwert, das Integral konvergiert also nicht. Betrachtet man allerdings nur den Fall $b = -a$, so existiert ein Grenzwert für $a \to \infty$, nämlich null. Dies ist der (in der Vorlesung nicht weiter behandelte) sogenannte CAUCHYsche Hauptwert des Integrals.

I_3 ließe sich nach dem Residuensatz berechnen; insbesondere konvergiert das Integral also. Da der Integrationsbereich symmetrisch ist und der Integrand ungerade, muß I_3 verschwinden.

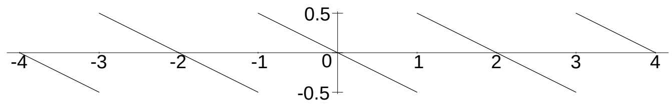
Über I_4 läßt sich ohne aufwendigere Untersuchung nichts sagen; man kann zeigen, daß auch dieses Integral nicht konvergiert, daß aber sein CAUCHYscher Hauptwert existiert und gleich $\frac{1}{8}\sqrt{2}\,\pi$ ist.

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode zwei, und für $|t| < 1$ sei $f(t) = -\frac{1}{2}t$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-4, 4]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

Lösung: f ist ungerade.

c) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f !

Lösung: Da f eine ungerade Funktion ist, gibt es nur Sinusterme. Die Periode ist zwei, also ist $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Der Koeffizient b_ℓ von $\sin \ell\pi t$ ist

$$b_\ell = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\sin \ell\pi t\, dt = \int_{-1}^{1} -\frac{t}{2}\sin \ell\pi t\, dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t \sin \ell\pi t\, dt\,;$$

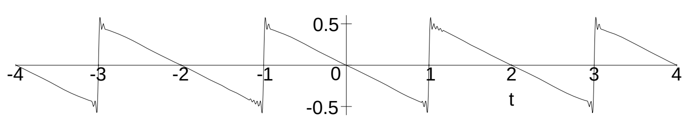
nach der am Ende der Klausur angegebenen Formel für $\int t \sin at\, dt$ ist also

$$b_\ell = \frac{-1}{2}\left.\left(\frac{\sin \ell\pi t}{\ell^2\pi^2} - \frac{t\cos \ell\pi t}{\ell\pi}\right)\right|_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos \ell\pi - \cos(-\ell\pi)}{\ell\pi} = \frac{\cos \ell\pi}{\ell\pi} = \frac{(-1)^\ell}{\ell\pi}\,.$$

Die gesuchte FOURIER-Reihe ist damit $S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell\pi}\sin \ell\pi t\,.$

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser FOURIER-Reihe das GIBBS-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Lösung: Genau an den Unstetigkeitsstellen, also bei den ungeraden ganzen Zahlen. Die Reihe konvergiert dort gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigen Grenzwert, also gegen null.



Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte der Funktion $f_r(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } |t| \le r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für $r > 0$, und geben Sie diese in rein reeller Form an!

Lösung: Nach Definition ist $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-r}^{r} \cos t\, e^{-i\omega t}\, dt$, was sich nach der im Anhang zur Klausur angegebenen Formel für $\int \cos at\, e^{ct}\, dt$ mit $c = -i\omega$ und

$a = 1$ weiter ausrechnen läßt als

$$\widehat{f}(\omega) = \left.\frac{e^{-i\omega t}(-i\omega\cos t + \sin t)}{1-\omega^2}\right|_{-r}^{r} = \frac{e^{-i\omega r}(-i\omega\cos r + \sin r) - e^{i\omega r}(-i\omega\cos r - \sin r)}{1-\omega^2}$$
$$= \frac{(e^{i\omega r} - e^{-i\omega r})\cdot i\omega\cos r + (e^{i\omega r} + e^{-i\omega r})\sin r)}{1-\omega^2} = 2\cdot\frac{\omega\cos r\cdot\sin r\omega - \sin r\cdot\cos r\omega}{\omega^2-1}\,.$$

b) Was ist die LAPLACE-Transformierte von f_r ?

Lösung: $\mathcal{L}\{f_r(t)\}(s) = \int_0^r \cos t\cdot e^{-st}\,dt$ läßt sich ebenfalls mit der Formel aus dem Anhang berechnen:

$$\mathcal{L}\{f_r(t)\}(s) = \left.\frac{e^{-st}(-s\cos t + \sin t)}{s^2+1}\right|_0^r = \frac{e^{-rs}(\sin r - s\cos r) + s}{s^2+1}\,.$$

c) Existiert für FOURIER- und/oder LAPLACE-Transformierte ein Limes für $r \to \infty$? Falls ja, was ist er?

Lösung: Für die FOURIER-Transformierte existiert sicherlich kein Limes, denn weder $\cos r$ noch $\sin r$ konvergieren für $r \to \infty$. Im Falle der LAPLACE-Transformation kommt r nur im Term $e^{-rs}(\sin r - s\cos r)$ vor, der für $r \to \infty$ und $\Re s > 0$ gegen null geht. Somit existiert hier ein Limes und ist gleich $\frac{s}{s^2+1}$, die LAPLACE-Transformierte des Kosinus.

d) Wo verschwinden die Nenner von $\widehat{f}_r(\omega)$ und $\mathcal{L}\{f_r(t)\}(s)$? Können Sie diese Nullstellen erklären?

Lösung: Die Nullstellen sind bei $\omega = \pm 1$ *bzw.* $s = \pm i$, entsprechend der Tatsache, daß die Kreisfrequenzen ± 1 die einzigen sind, die für $\cos t$ benötigt werden. f_r ist das Produkt des Kosinus mit einem Rechteckimpuls, die Transformationen entstehen also aus denen des Kosinus durch Faltung mit der Transformation eines Rechteckimpulses, wobei diese Polstellen erhalten bleiben.

Aufgabe 4: *(12 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2\lambda+\lambda^2+1)$$
$$= (1-\lambda)^3\,;$$

$\lambda = 1$ ist also der einzige Eigenwert, und er hat die algebraische Vielfachheit drei. Die Eigenvektoren dazu werden von der Matrix

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

annuliert; da diese Matrix Rang eins hat, ist der Lösungsraum zweidimensional, d.h. die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ist nur zwei. Konkret besagt die Gleichung $(A-$

$E)\vec{v}=\vec{0}$, daß die erste und die dritte Komponente von $\vec{v}$ entgegengesetzt gleich sein müssen, wohingegen die zweite beliebig ist. Der Eigenraum wird daher aufgespannt beispielsweise von den beiden Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein,* denn die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts eins ist kleiner als die algebraische.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

Lösung: Als die ersten beiden Vektoren einer solchen Basis können wir natürlich die beiden Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ nehmen; als dritten brauchen wir einen Hauptvektor der Stufe zwei.

Es gibt eine schnelle und eine etwas langsamere Art einen solchen Vektor zu finden: Wenn wir uns überlegen, daß der Hauptraum der Stufe zwei eine größere Dimension hat als der (zweidimensionale) Eigenraum, ist klar, daß dieser Hauptraum der gesamte $\mathbb{R}^3$ ist, so daß wir als $\vec{v}_3$ einen beliebigen Vektor wählen können, der nicht im Eigenraum liegt.

Alternativ rechnet man explizit nach, daß $(A-E)^2$ die Nullmatrix ist, woraus wieder folgt, daß $\vec{v}_3$ beliebig aus dem Komplement des Eigenraums gewählt werden kann.

Um den Wechsel zwischen der Standardbasis und der Basis aus Eigen- und Hauptvektoren möglichst einfach zu machen, bietet sich an, als $\vec{v}_3$ den dritten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^3$ zu wählen. Für diesen ist

$$A\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}_3 + \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 .$$

Die gesuchte Dreiecksgestalt ist somit

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bezüglich der Basis } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

Lösung: Wir schreiben $\Delta = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Da N den dritten Basisvektor auf eine Linearkombination der ersten beiden abbildet und diese wiederum auf den Nullvektor, ist N^2 die Nullmatrix. Außerdem kommutieren N und D (das ist hier besonders trivial, da D gleich der Einheitsmatrix ist), also ist

$$\begin{aligned} e^{\Delta t} &= e^{Dt+Nt} = e^{Dt}e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} (E + Nt) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & te^t \\ 0 & e^t & -2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Um zu sehen, wie diese Matrix bezüglich der Standardbasis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ aussieht, brauchen wir die Inverse zur Matrix B des Basiswechsels; letztere hat die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ als Spalten, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wie man entweder sofort sieht oder nach einer einzigen Zeilenoperation mit dem GAUSS-Algorithmus. Damit ist

$$e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1} = \begin{pmatrix} e^t + te^t & 0 & te^t \\ -2te^t & e^t & -2te^t \\ -te^t & 0 & e^t - te^t \end{pmatrix}.$$

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + z(t), \quad \dot{y}(t) = -2x(t) + y(t) - 3z(t), \quad \dot{z}(t) = -x(t)$$

mit $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $z(0) = -1$! *Falls Sie Teil d) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“* $e^{At} = \begin{pmatrix} e^t - 2te^t & 2 & -2te^t \\ te^t & e^t & te^t \\ 3te^t & 3 & e^t + 3te^t \end{pmatrix}$ *arbeiten.*

Lösung: Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, und seine Koeffizientenmatrix ist die gerade berachtete Matrix A. Die einzige Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + te^t & 0 & te^t \\ -2te^t & e^t & -2te^t \\ -te^t & 0 & e^t - te^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{pmatrix},$$

d.h. $x(t) = e^t$, $y(t) = 0$ und $z(t) = -e^t$. *(Die „Ersatzmatrix“ führt auf dasselbe Ergebnis.)*

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Die x- und z-Komponente gehen gegen $+\infty$ *bzw.* $-\infty$, die y-Komponente bleibt konstant null.

g) Wie ändert sich das Langzeitverhalten von $x(t)$ und $y(t)$ bei einer leichten Veränderung der Anfangsbedingungen?

Lösung: $y(t)$ geht dann gegen $\pm\infty$ statt identisch zu verschwinden. Bei $x(t)$ kommt noch ein Summand mit te^t dazu; je nach dessen Koeffizienten kann $x(t)$ nun gegen $-\infty$ statt gegen $+\infty$ gehen.

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = \cos 3t + 12 \sin 3t\,!$$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 0$ hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = (\lambda + 2)^2 + 4 = 0\,,$$

die Nullstellen sind also $\lambda_{1/2} = -2 \pm 2i$, und die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist $y(t) = e^{-2t}(a\cos 2t + b\sin 2t)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, reicht es, eine einzige Lösung zu finden, denn die Differenz zweier Lösungen erfüllt die homogene Gleichung.

Erfahrungsgemäß findet man bei Gleichungen dieser Bauart oft eine spezielle Lösung, die von ähnlicher Bauart ist wie die rechte Seite der Gleichung; wir können als unser Glück versuchen mit einem Ansatz der Form $x(t) = c\cos 3t + d\sin 3t$. Dann ist

$$\dot{x}(t) = 3d\cos t - 3c\sin t \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -9c\cos t - 9d\sin t\,,$$

also

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 8x(t) &= (-9c + 12d + 8c)\cos t + (-9d - 12c + 8d)\sin t \\ &= (-c + 12d)\cos t + (-12c - d)\sin t\,.\end{aligned}$$

Dies muß gleich der rechten Seite $\cos 3t + 12\sin 3t$ sein, $c$und d sind somit Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$-c + 12d = 1 \quad \text{und} \quad -12c - d = 12\,.$$

Subtrahieren wir zwölfmal die erste Gleichung von der zweiten, erhalten wir die Gleichung $-13d = 0$, d.h. $d = 0$ und $c = -1$. Die gesuchte allgemeine Lösung ist daher

$$y(t) = -\cos 3t + e^{-2t}(a\cos 2t + b\sin 2t) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Lösung: Da e^{-2t} gegen Null geht, konvergieren alle Lösungen gegen die spezielle Lösung $x(t) = -\cos 3t$, also gegen eine reine Schwingung.

Aufgabe 6: *(3 Punkte)*

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = -10ty(t)$ mit $y(0) = 1$!

Lösung: Das ist offensichtlich eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen: Wann immer $y(t) \neq 0$ ist, ist sie äquivalent zu $\dfrac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -10t$.

Für die Lösung des Anfangswertproblems gilt daher

$$\int_1^{y(t)} \frac{d\eta}{\eta} = -\int_0^t 10\tau\,d\tau \quad \text{oder} \quad \ln y(t) = -5\tau^2\,.$$

Damit ist $y(t) = e^{-5t^2}$.