Wolfgang K. Seiler | A5, C201
Tel. 2515

9. Januar 2007

Modulklausur Höhere Mathematik II

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = i$!

2) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von $f(t) = \sin^3 t$!

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

4) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar, so auch e^A.

5) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \arctan y(t)$ mit $y(0) = 1$ ist eindeutig lösbar.

6) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - y(t)^2 \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t)\,!$$

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Für welche(s) der folgenden Integrale liefert der Residuensatz den Wert?

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 9}, \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4 + 64}, \qquad I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 - 64}$$

b) Berechnen Sie *eines* der Integrale aus *a)* über den Residuensatz!

c) Was können Sie über die anderen drei Integrale sagen?

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode zwei, und für $|t| < 1$ sei $f(t) = -\frac{1}{2}t$.

a) Skizzieren Sie die Funktion f über dem Intervall $[-4, 4]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beiden?

c) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f !

d) Wo tritt bei der Konvergenz dieser Fourier-Reihe das Gibbs-Phänomen auf, und wohin konvergiert die Reihe an diesen Punkten?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f_r(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } |t| \le r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für $r > 0$, und geben Sie diese in rein reeller Form an!

b) Was ist die Laplace-Transformierte von f_r ?

c) Existiert für Fourier- und/oder Laplace-Transformierte ein Limes für $r \to \infty$? Falls ja, was ist er?

d) Wo verschwinden die Nenner von $\widehat{f_r}(\omega)$ und $\mathcal{L}\{f_r(t)\}(s)$? Können Sie diese Nullstellen erklären?

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 4: *(12 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt?

d) Was ist e^{At} für $t \in \mathbb{R}$?

e) Finden Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + z(t), \quad \dot{y}(t) = -2x(t) + y(t) - 3z(t), \quad \dot{z}(t) = -x(t)$$

mit $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ und $z(0) = -1$! *Falls Sie Teil d) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“* $e^{At} = \begin{pmatrix} e^t - 2te^t & 2 & -2te^t \\ te^t & e^t & te^t \\ 3te^t & 3 & e^t + 3te^t \end{pmatrix}$ *arbeiten.*

f) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

g) Wie ändert sich das Langzeitverhalten von $x(t)$ und $y(t)$ bei einer leichten Veränderung der Anfangsbedingungen?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = \cos 3t + 12 \sin 3t\,!$$

b) Wie verhalten sich diese Lösungen für $t \to \infty$?

Aufgabe 6: *(3 Punkte)*

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = -10ty(t)$ mit $y(0) = 1$!

$\mathcal{H\ I\ L\ F\ S\ M\ I\ T\ T\ E\ L}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

$\mathcal{H\ I\ N\ W\ E\ I\ S\ E}$

$$\int t \sin at \, dt = \frac{\sin at}{a^2} - \frac{t \cos at}{a} + C, \qquad \int t \cos at \, dt = \frac{\cos at}{a^2} + \frac{t \sin at}{a} + C$$

$$\int te^{at} \, dt = \frac{te^{at}}{a} - \frac{e^{at}}{a^2} + C, \qquad \int e^{ct} \cos at \, dt = \frac{e^{ct}(c \cos at + a \sin at)}{c^2 + a^2} + C$$

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.

Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •