Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

12. Januar 2007

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $xy = 0$ ist ein Untervektorraum.

Lösung: *Falsch:* M enthält beispielsweise die beiden Vektoren $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$, nicht aber deren Summe $\binom{1}{1}$.

2) *Richtig oder falsch:* Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei $A^2 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $A = E$ oder $A = -E$.

Lösung: *Falsch;* auch $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und viele andere Matrizen haben E als Quadrat.

3) Bestimmen Sie die Determinante der 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$!

Lösung: Die Differenz zwischen den ersten beiden sowie auch zwischen der zweiten und der dritten Spalte sind jeweils der Vektor, dessen sämtliche Komponenten gleich eins sein; damit sind die Spalten linear abhängig, und die Determinante verschwindet.

4) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2;\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ ist linear.

Lösung: *Richtig,* denn jedes Element von $\mathbb{F}_2$ ist sein eigenes Quadrat, so daß φ einfach die Identität ist.

5) Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf den durch $x+y+z = 0$ gegebenen Untervektorraum E des $\mathbb{R}^3$!

Lösung: Da $\vec{v}$ senkrecht auf E steht, ist das der Nullvektor.

6) *Richtig oder falsch:* $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-2} = -1$

Lösung: *Falsch,* denn der Integrand ist im gesamten Integrationsbereich positiv, so daß der Wert des Integrals unmöglich negativ sein kann. (Da der Integrand an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist, existiert das Integral nicht, auch kein Cauchyscher Hauptwert).

7) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$ um den Nullpunkt!

Lösung: Wie aus Schule und/oder Analysis I bekannt, ist

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{24} + \cdots \; .$$

In diese Formeln müssen wir $z = x + y$ *bzw.* $z = x - y$ einsetzen. Offensichtlich liefern dann die Potenzen z^n Linearkombinationen von Monomen in x, y vom Grad n, d.h. das TAYLOR-Polynom dritten Grades von f ist

$$(x+y) - \frac{(x+y)^3}{6} + 1 - \frac{(x-y)^2}{4} = 1 + x + y - \frac{x^2}{4} + \frac{xy}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2y}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{6} \, .$$

8) Was ist $\operatorname{div}(\nabla f)$ für $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$?

Lösung: Die Divergenz des Gradienten ist der LAPLACE-Operator, d.h.

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 + 2 + 2 = 6 \, .$$

Aufgabe 1: *(9 Punkte)*

V sei der Vektorraum aller reeller Polynome f in X vom Grad höchstens fünf, die an der Stelle null verschwinden.

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

Lösung: Jedes reelle Polynom f vom Grad höchstens fünf läßt sich eindeutig schreiben als

$$f = a_5X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \, ;$$

es verschwindet genau dann an der Stelle null, wenn $a_0 = 0$ ist. Damit ist klar, daß die X-Potenzen X, X^2, X^3, X^4 und X^5 eine Basis bilden.

b) Welche Dimension hat V ?

Lösung: Da es eine fünfelementige Basis gibt, ist $\dim V = 5$.

c) Zeigen Sie: $f \mapsto (Xf)' - f' - f'(0)$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

Lösung: Multiplikation mit X, Ableitung und Addition von Polynomen sind allesamt lieare Operationen, also definiert φ zumindest einmal eine lineare Abbildung in den Vektorraum *aller* reeller Polynome.

Zu zeigen bleibt, daß $\varphi(f)$ für $f \in V$ wieder in V liegt, d.h., daß $\varphi(f)$ höchstens den Grad fünf hat und an der Stelle null verschwindet.

Xf hat einen Grad mehr als f; durch die Ableitung wird dieser wieder um eins reduziert. f' hat um eins kleineren Grad als f, und $f'(0)$ ist eine Konstante. Somit hat auch $\varphi(f)$ wieder höchstens den Grad fünf.

Wegen $(Xf)' = Xf' + f$ verschwindet $(Xf)'$ an der Stelle null, da sowohl X als auch f dort verschwinden. $f' - f'(0)$ verschwindet dort nach Konstruktion, also auch $\varphi(f)$.

d) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *a)*?

Lösung: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren. Wegen

$$\varphi(X) = 2X + 1 - 1 = 2X, \quad \varphi(X^2) = 3X^2 + 2X, \quad \varphi(X^3) = 4X^3 + 3X^2,$$
$$\varphi(X^4) = 5X^4 + 4X^3 \quad \text{und} \quad \varphi(X^5) = 6X^5 + 5X^4$$

ist die Abbildungsmatrix also $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

e) Bestimmen Sie Kern φ und Bild φ!

Lösung: Wie die Bilder der Basisvektoren zeigen, hat $\varphi(f)$ für jedes $f \in V$ denselben Grad wie f; daher ist φ injektiv und Kern $\varphi = \{0\}$. Nach der Dimensionsformel ist dann $\dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Kern} \varphi = \dim V$,d.h. Bild $\varphi = V$.

f) Welche Eigenwerte und welche Determinante hat die Abbildungsmatrix von φ?

Lösung: Da die Abbildungsmatrix eine Dreeicksmatrix ist, sind ihre Eigenwerte einfach die Diagonaleinträge, also $2, 3, 4, 5, 6$. Die Determinante ist deren Produkt, also $6! = 120$.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 && (1) \\ 2x + 3y + 5z &= 7 && (2) \\ x + 3y + a^2 z &= 7 + a && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist* $z = 1/(a-2)$.

Lösung: Zur Elimination von x aus den Gleichungen (2) und (3) subtrahieren wir die erste Gleichung zweimal von der zweiten und einmal von der dritten:

$$\begin{aligned} -y - z &= -1 && (4) \\ y + (a^2 - 3)z &= 3 + a && (5) \end{aligned}$$

Die Summe dieser beiden Gleichungen ist

$$(a^2 - 4)z = 2 + a \quad \text{oder} \quad (a+2)(a-2)z = a + 2\,.$$

Für $a = 2$ steht hier $0 = 4$; in diesem Fall ist das Gleichungssystem somit unlösbar.
Für $a = -2$ erhalten wir die Gleichung $0z = 0$, die von jeder reellen Zahl $z = \lambda$ erfüllt wird.
Für $a \neq \pm 2$ schließlich können wir durch $(a+2)(a-2)$ dividieren und erhälten die einzige Lösung

$$z = \frac{1}{a-2}\,.$$

Nach Gleichung (4) ist dann

$$y = 1 - z = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{a-2} = \dfrac{a-3}{a-2} & \text{für } a \neq \pm 2 \\ 1 - \lambda & \text{für } a = -2 \end{cases},$$

und nach Gleichung (1) ist

$$x = 4 - 2y - 3z = 2 - z = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{a-2} = \dfrac{2a-5}{a-2} & \text{für } a \neq \pm 2 \\ 2 - \lambda & \text{für } a = -2 \end{cases}.$$

Somit ist $\mathcal{L}_a = \begin{cases} \left\{\left(\frac{2a-5}{a-2}, \frac{a-3}{a-2}, \frac{1}{a-2}\right)\right\} & \text{für } a \neq \pm 2 \\ \left\{(2-\lambda, 1-\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = -2 \\ \emptyset & \text{für } a = 0 \end{cases}$.

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -6 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -6 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (5-\lambda)\big((-1-\lambda)(6-\lambda) + 12\big) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3)\,,$$

was für

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 5$$

verschwindet. Die Eigenwerte sind sind also 2, 3 und 5.
$A-2E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; für einen Vektor $\vec{v}_1$ mit $(A-2E)\vec{v}_1 = \vec{0}$ muß also die zweite Komponente verschwinden und zweimal die erste gleich der dritten sein, d.h. der Eigenraum zum Eigenwert eins wird aufgespannt von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$A - 3E = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ annuliert genau die Vektoren, deren zweite Komponente verschwindet, während die dritte das Doppelte der ersten ist; der Eigenraum zum Eigenwert drei wird also aufgespannt von $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Da in den Spalten einer Matrix die Produkte mit den Koordinateneinheitsvektoren stehen, ist schließlich auch ohne Rechnung klar, daß der zweite Koordinateneinheitsvektor $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Eigenraum zum Eigenwert fünf aufspannt.

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthonormalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{v}$, für den zweiten nehmen wir eine Linearkombination $\vec{w} + \lambda\vec{v}$, deren Produkt mit $\vec{v}$ verschwindet:

$$(\vec{w} + \lambda\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \vec{v} + \lambda\vec{v} \cdot \vec{v} = (5 + 55 + 32) + (1^2 + 4^2 + 8^2)\lambda = 81 + 81\lambda$$

verschwindet genau dann, wenn $\lambda = -1$ ist, der zweite Vektor der Orthonormalbasis ist also $\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$. Auch das Skalarprodukt dieses Vektors mit sich selbst ist 81, also besteht die gesuchte Orthonormalbasis aus den Vektoren

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-4\\-7\\4\end{pmatrix}.$$

b) *Ditto* für den von $\vec{x} = \begin{pmatrix}i\\2\\2i\end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix}2\\2i\\1\end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$!

Lösung: Wieder suchen wir als erstes eine Orthogonalbasis: Erster Basisvektor ist $\vec{x}$, für den zweiten machen wir einen Ansatz $\vec{y} + \lambda\vec{x}$ derart, daß $(\vec{y} + \lambda\vec{x}) \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{x} + \lambda\vec{x} \cdot \vec{x}$ verschwindet. Da

$$\vec{y} \cdot \vec{x} = 2 \cdot \bar{i} + 2i \cdot 2 + 1 \cdot \overline{2i} = -2i + 4i - 2i = 0$$

bereits verschwindet, bilden $\vec{x}$ und $\vec{y}$ schon eine Orthogonalbasis. Wir müssen die Vektoren also nur noch auf Länge eins normieren; da $1^2 + 2^2 + 2^2 = 9 = 3^2$ ist, haben beide die Länge drei, also besteht die gesuchte Orthonormalbasis aus den Vektoren

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}i\\2\\2i\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2i\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie Gradient und Hesse-Matrix der Abbildung

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin^2 x + x\cos 2y + x^2y^2 \end{cases} !$$

Lösung: Da die Funktion beliebig oft stetig differenzierbar ist, also insbesondere zweimal, genügt es, die partiellen Ableitungen zu berechnen; außerdem können wir das Lemma von Schwarz anwenden, wonach $f_{xy} = f_{yx}$ ist. Wegen

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\sin x\cos x + \cos 2y + 2xy^2 \\ f_y(x,y) &= -2x\sin 2y + 2x^2y \\ f_{xx}(x,y) &= -2\sin^2 x + 2\cos^2 x + 2y^2 \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= -2\sin 2y + 4xy \\ f_{yy}(x,y) &= -4x\cos 2y + 2x^2 \end{aligned}$$

ist somit $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}2\sin x\cos x + \cos 2y + 2xy^2 \\ -2x\sin 2y + 2x^2y\end{pmatrix}$ und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin^2 x + 2\cos^2 x + 2y^2 & -2\sin 2y + 4xy \\ -2\sin 2y + 4xy & -4x\cos 2y + 2x^2 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\sin e^x}{y} \\ \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \end{pmatrix} \end{cases} !$$

Lösung: Die erste Komponente $\frac{\sin e^x}{y}$ von $\vec{V}$ hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{e^x \cos e^x}{y} \quad \text{und} \quad -\frac{\sin e^x}{y^2}\,;$$

für die zweite Komponente $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ erhalten wir entsprechend

$$\frac{2x(x^2-y^2)-2x(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{2y(x^2-y^2)+2y(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}\,.$$

Also ist

$$J_{\vec{V}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{e^x \cos e^x}{y} & -\frac{\sin e^x}{y^2} \\ \frac{-4xy^2}{(x^2-y^2)^2} & \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Die Divergenz von $\vec{V}$ ist die Summe der Diagonalelemente der JACOBI-Matrix, also

$$\operatorname{div} \vec{V}(x,y) = \frac{e^x \cos e^x}{y} + \frac{4x^2y}{(x^2-y^2)^2}\,.$$