WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

12. Januar 2007

Modulklausur Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Menge M aller Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ mit $xy = 0$ ist ein Untervektorraum.

2) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ sei $A^2 = E$ die Einheitsmatrix. Dann ist $A = E$ oder $A = -E$.

3) Bestimmen Sie die Determinante der 3×3-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$!

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}_2^2;\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ ist linear.

5) Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf den durch $x+y+z = 0$ gegebenen Untervektorraum E des $\mathbb{R}^3$!

6) Richtig oder falsch: $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-2} = -1$

7) Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom dritten Grades von $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y)$ um den Nullpunkt!

8) Was ist $\operatorname{div}(\nabla f)$ für $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$?

Aufgabe 1: (*9 Punkte)*

V sei der Vektorraum aller reeller Polynome f in X vom Grad höchstens fünf, die an der Stelle null verschwinden.

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V!

b) Welche Dimension hat V ?

c) Zeigen Sie: $f \mapsto (Xf)' - f' - f'(0)$ definiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$.

d) Welche Abbildungsmatrix hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ aus *a)*?

e) Bestimmen Sie Kern φ und Bild φ !

f) Welche Eigenwerte und welche Determinante hat die Abbildungsmatrix von φ ?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 && (1)\\ 2x + 3y + 5z &= 7 && (2)\\ x + 3y + a^2 z &= 7 + a && (3) \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$! *Hinweis (***nur** *zur Kontrolle auf Rechenfehler): Für viele Parameterwerte ist* $z = 1/(a-2)$.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$!

b) Ditto für den von $\vec{x} = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$!

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie Gradient und HESSE-Matrix der Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \sin^2 x + x \cos 2y + x^2 y^2 \end{cases} !$$

b) Berechnen Sie die JACOBI-Matrix und die Divergenz des Vektorfelds

$$\vec{V}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\sin e^x}{y} \\ \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \end{pmatrix} \end{cases} !$$

$\mathcal{HILFSMITTEL}$

Als Hilfsmitel sind nur Taschenrechner ohne Graphik
und ohne höhere Programmiersprache oder CAS zugelassen.

Sobald ich alle Klausuren korrigiert habe, werde ich die Ergebnisse per E-Mail bekanntgeben.
Falls Sie nicht sicher sind, daß ich Ihre aktuelle E-Mail-Adresse habe,
notieren Sie diese bitte in Ihrer Klausur.

Abgabe bis zum Freitag, dem 12. Januar 2007, um 11^{15} Uhr

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •