WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

9. Dezember 2006

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = -6i$!

Lösung: Da $-6i = 6e^{-\pi i/2}$ ist, können wir z.B. $z = \sqrt{6} \cdot e^{-i\pi/4} = \sqrt{6}\big(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\big) = \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) = \sqrt{3} \cdot (1-i)$ nehmen.

Alternativlösung: Wir setzen $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Falls $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -6i$ sein soll, muß $a = \pm b$ sein und $2ab = \pm 2a^2 = -6$. Die ist nur dann mit reellem a lösbar, wenn $b = -a$ ist; dann ist $a = \pm\sqrt{3}$, also $z = \pm\sqrt{3} \cdot (1-i)$.

2) *Richtig oder falsch:* $f(z) = \mathfrak{Re}\, z$ ist eine holomorphe Funktion.

Lösung: *Falsch,* denn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt: $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $u(x,y) = x$ und $v(x,y) \equiv 0$. Daher sind $u_x \equiv 1$ und $v_y \equiv 0$ verschieden.

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

Lösung: *Richtig,* denn sie hat die beiden verschiedenen Eigenwerte 2 und 7, also gibt es zwei linear unabhängige Eigenvektoren, und die bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

4) Welchen Bedingungen müssen $a, b \in \mathbb{C}$ genügen, damit die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -i \\ b & -1 \end{pmatrix}$ symmetrisch *bzw.* HERMITEsch ist?

Lösung: A ist genau dann symmetrisch, wenn $b = -i$ ist, und HERMITEsch genau dann, wenn $a \in \mathbb{R}$ und $b = i$.

5) *Richtig oder falsch:* Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\det e^A \neq 0$

Lösung: *Richtig:* Da A mit $-A$ kommutiert, ist $e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A}$ die Einheitsmatrix, d.h. e^A ist invertierbar, so daß die Determinante von e^A nicht verschwindet.

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$?

Lösung: Das Produkt der vier Nullstellen ist $(-1)^4 \cdot (-3) = -3$, ihre Summe ist 4. *Falls* alle Nullstellen ganzzahlig sein sind, kommen nur Teiler von drei in Frage, also ± 1 und ± 3. In der Tat verschwindet f für die drei Werte ± 1 und $+3$. Deren Produkt ist -3 und ihre Summe ist $+3$; also ist die noch fehlende Nullstelle gleich eins. Somit ist die Eins eine doppelte Nullstelle, -1 und 3 sind einfache.

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \ln\big(1 + y(t)^2\big)$ mit $y(0) = 0$ hat genau eine Lösung.

Lösung: *Richtig,* denn die Ableitung von $\ln(1+y^2)$ ist $\frac{2y}{1+y^2}$, und diese Funktion ist beschränkt, da der Zähler größeren Grad als der Nenner hat und der Nenner (durch die

Eins) nach unten beschränkt ist. Somit erfüllt die rechte Seite eine LIPSCHITZ-Bedingung, und der Satz von PICARD-LINDELÖF ist anwendbar.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$! *b)* Was ist $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$?

Lösung:

a) Da der Zählergrad zwei um mehr als eins kleiner ist als der Nennergrad vier des Integranden und der Nenner keine Nullstellen auf der reellen Achse hat, kann das Integral mit Hilfe des Residuenkalküls berechnet werden: Sein Wert ist $2\pi i$ mal der Summe der Residuen des Integranden bei den Polen in der oberen Halbebene.

Die Nullstellen des Nennern liegen bei $x = \pm i$ und $x = \pm 3i$; sie sind allesamt keine Nullstellen des Zählers und führen somit zu Polen. Für den Wert des Integrals relevant sind nur die Residuen bei den Polstellen in der oberen Halbebene, also bei $x_1 = i$ und $x_2 = 3i$. Beides sind Pole erster Ordnung, so daß die Residuen einfach als Limites berechnet werden können:

$$\operatorname*{Res}_{x=x_\nu} \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x^2+9)} = \lim_{x\to x_\nu} (x-x_\nu)\frac{(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+9)}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{x=i} \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x^2+9)} &= \lim_{x\to i} \frac{(x-i)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+9)} = \lim_{x\to i} \frac{(x-i)(x^2-3)}{(x-i)(x+i)(x^2+9)}\\ &= \lim_{x\to i} \frac{(x^2-3)}{(x+i)(x^2+9)} = \frac{i^2-3}{(i+i)\big(i^2+9\big)} = \frac{-4}{2i\cdot 8} = \frac{-1}{4i}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{x=3i} \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x^2+9)} &= \lim_{x\to 3i} \frac{(x-3i)(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2+9)} = \lim_{x\to 3i} \frac{(x-3i)(x^2-3)}{(x^2+1)(x+3i)(x-3i)}\\ &= \lim_{x\to 3i} \frac{(x^2-3)}{(x^2+1)(x+3i)} = \frac{(3i)^2-3}{(3i+3i)\big((3i)^2+1\big)} = \frac{-12}{6i\cdot(-8)} = \frac{1}{4i}\,.\end{aligned}$$

Damit ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = 2\pi i\left(\frac{-1}{4i}+\frac{1}{4i}\right) = 0\,.$

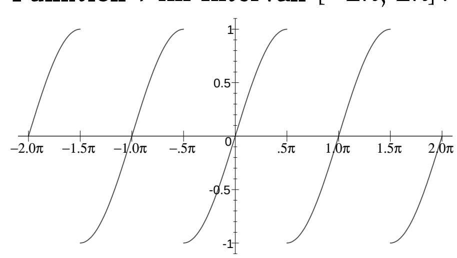
b) Da der Integrand gerade ist, hat das Integral von $-\infty$ nach ∞ den doppelten Wert wie das von 0 nach ∞, d.h. auch dieses Integral verschwindet.

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*

Sei $f(t) = \sin t$ für $-\frac{\pi}{2} < t \le \frac{\pi}{2}$, periodisch fortgesetzt mit Periode π.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

Lösung:



b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beidem?

Lösung: Streng genommen keines von beidem, denn zwar ist für alle t, die kein echt halbzahliges Vielfaches von π sind, $f(-t) = -f(t)$, aber $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ und genauso bei allen anderen echt halbzahligen Vielfachen von π. Da isolierte Punkte für die Berechnung einer FOURIER-Reihe ohne Bedeutung sind, können aber wir aber im folgenden trotzdem so tun, als sei f ungerade.

c) Berechnen Sie die reelle FOURIER-Reihe von f!

Lösung: Da wir f wie eine ungerade Funktion behandeln können, gibt es nur Sinusterme. Zur Berechnung dieser Terme integrieren wir am besten über das Periodenintervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, in dem f explizit gegeben ist. Die zur Periode π gehörige Grundfrequenz ist $\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, also ist

$$
\begin{aligned}
b_\ell &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin \ell\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \sin 2\ell t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\cdot\frac{e^{2\ell it}-e^{-2\ell it}}{2i}\,dt \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{(2\ell+1)it}+e^{-(2\ell+1)it}-e^{(2\ell-1)it}-e^{-(2\ell-1)it}}{4}\,dt \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\cos(2\ell+1)t-\cos(2\ell-1)t\big)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \big(\cos(2\ell-1)t-\cos(2\ell+1)t\big)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(2\ell-1)t}{2\ell-1}-\frac{\sin(2\ell+1)t}{2\ell+1}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}.
\end{aligned}
$$

Da Sinus eine ungerade Funktion ist, ist der Wert an der unteren Grenze jeweils das Negative des Werts an der oberen Grenze, d.h.

$$
b_\ell = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2\ell-1)\frac{\pi}{2}}{\ell-1}-\frac{\sin(2\ell+1)\frac{\pi}{2}}{\ell+1}\right).
$$

$\sin(2\ell-1)\frac{\pi}{2}$ und $\sin(2\ell+1)\frac{\pi}{2}$ haben Argumente, deren Differenz π ist, d.h. sie unterscheiden sich nur im Vorzeichen, so daß

$$
\begin{aligned}
b_\ell &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2\ell-1)\frac{\pi}{2}}{2\ell-1}+\frac{\sin(2\ell-1)\frac{\pi}{2}}{2\ell+1}\right) \\
&= \frac{2\sin(2\ell-1)\frac{\pi}{2}}{\pi}\left(\frac{1}{2\ell-1}+\frac{1}{2\ell+1}\right) = \frac{2\sin(2\ell-1)\frac{\pi}{2}}{\pi}\cdot\frac{4\ell}{4\ell^2-1}
\end{aligned}
$$

ist. $\sin(2\ell-1)\frac{\pi}{2} = 1$ für ungerade ℓ und -1 für gerade, also ist $b_\ell = \dfrac{(-1)^{\ell+1}\cdot 8\ell}{\pi(4\ell^2-1)}$.

Die FOURIER-Reihe von f ist somit

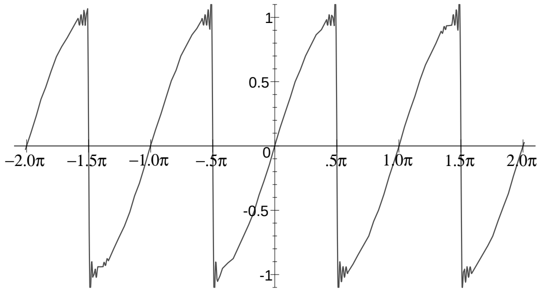
$$
S_f(t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}\cdot 8\ell}{\pi(4\ell^2-1)}\sin 2\ell t\,.
$$

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

Lösung: Für alle Stellen t, an denen f stetig ist, konvergiert $S_f(t)$ gegen $f(t)$, d.h. also für alle t, die keine echt halbzahligen Vielfachen von π sind. Für letztere haben wir Sprungstellen; dort konvergiert die Reihe gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert, also gegen null.

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das Gibbs-Phänomen auf?

Lösung: Das Gibbs-Phänomen tritt nur an Sprungstellen auf, also an den echt halbzahligen Vielfachen von π.



f) Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten von f!

Lösung: Wegen $\sin 2\ell t = \frac{1}{2i}\left(e^{2i\ell t} - e^{-2i\ell t}\right)$ ist $S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2kit}$ mit

$$c_k = \begin{cases} \frac{b_k}{2i} & = \frac{(-1)^k \cdot 4ik}{\pi(4k^2-1)} & \text{für } k > 0 \\ 0 & & \text{für } k = 0 \\ -\frac{b_{-k}}{2i} & = \frac{(-1)^{k+1} \cdot 4ik}{\pi(4k^2-1)} & \text{für } k < 0 \end{cases} .$$

g) Welche Aussage liefert der Satz von Parseval für die Funktion f?

Lösung: Nach dem Satz von Parseval ist die Summe der Betragsquadrate der komplexen Fourier-Koeffizienten gleich der L^2-Norm von f, d.h.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32k^2}{\pi^2(4k^2-1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2\pi}(t - \sin t \cos t)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

oder $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64} .$$

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion $f(t) = [2|\sin t|]$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet!

Lösung: Wir wissen, daß die Ableitung im Distributionensinn überall dort, wo die Funktion differenzierbar ist, mit der Ableitung selbst übereinstimmt, während jede Sprungstelle a einen Term $\left(f(a^+) - f(a^-)\right) \cdot \delta(t-a)$ liefert. Die hier betrachtete Funktion f verschwindet überall dort, wo $|\sin t| < \frac{1}{2}$ ist, identisch und hat dort somit auch die Nullfunktion als Ableitung. Dort, wo $\frac{1}{2} < |\sin t| < 1$ ist, hat die Funktion den Wert eins und somit ebenfallls die Nullfunktion als Ableitung. An den Stellen mit $|\sin t| = 1$ schließlich, bei den echt halbzahligen Vielfachen von π also, ist $f(t) = 2$, und die Funktion ist dort nicht differenzierbar. Außerdem ist sie natürlich auch überall dort nicht differenzierbar, wo $|\sin t| = \frac{1}{2}$ ist, also an den Stellen $t = pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ *(s. Formelanhang).* Dort springt f bei positivem Vorzeichen von $\pi/6$ von null auf eins, bei negativem von eins auf null. Bei den echt halbzahligen Vielfachen von π ist der linksseitige Grenzwert von f gleich dem rechtsseitigen; lediglich der Funktionswert weicht davon ab.

Damit ist $\dot{T}_f(\varphi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\varphi(k + \frac{\pi}{6}) - \varphi(k - \frac{\pi}{6})\right)$. Als „Funktion“ geschrieben ist die Ableitung $\dot{f}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\delta(t - k - \frac{\pi}{6}) - \delta(t - k + \frac{\pi}{6})\right)$.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \le |t| \le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für zwei feste reelle Zahlen a, b mit $0 \le a < b$!

Lösung:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-b}^{-a} e^{-i\omega t}\,dt + \int_{a}^{b} e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{-i\omega}\left(e^{-i\omega t}\Big|_{-b}^{-a} + e^{-i\omega t}\Big|_{a}^{b}\right) \\ &= \frac{1}{-i\omega}\left(e^{i\omega b} - e^{i\omega a} + e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b}\right) = \frac{2}{\omega}\,\frac{\left(e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right) - \left(e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}\right)}{2i} \\ &= \frac{2\sin\omega b - 2\sin\omega a}{\omega}\,.\end{aligned}$$

b) $g(t)$ sei die Faltung von $f(t)$ mit dem Rechteckimpuls $R(t)$, der auf $[-c, c]$ den Wert eins annimmt und sonst überall verschwindet. Bestimmen Sie $\widehat{g}(\omega)$!

Lösung: $R(t)$ ist offensichtlich der Speziallfall $a = 0$ und $b = c$ der Funktion f, d.h.

$$\widehat{R}(\omega) = \frac{2\sin\omega c}{\omega} \quad \text{und} \quad \widehat{g}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{R}(\omega) = \frac{4(\sin\omega b - \sin\omega a)\sin\omega c}{\omega^2}\,.$$

Aufgabe 5: *(12 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2\left((2-\lambda)^2 - 9\right).\end{aligned}$$

Der hintere Faktor verschwindet genau dann, wenn $(2-\lambda)^2 = 9$, also $\lambda = 2 \pm 3$ ist, d.h. für $\lambda = -1$ und $\lambda = 5$. Somit haben wie die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 5$ mit algebraischer und damit auch geometrischer Vielfachheit eins und $\lambda_2 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit drei. Zur Bestimmung der geometrischen Vielfachheit brauchen wir die Dimension des Eigenraums; im Hinblick auf *c)* bis *e)* berechnen am besten gleich Basen beider Eigenräume. Wir müssen dazu die homogenen linearen Gleichungssysteme mit den Matrizen

$$A - \lambda_1 E = A - 5E = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A - \lambda_2 E = A + E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

für die Komponenten x, y, z, w der Vektoren aus den Eigenräumen lösen.

Für $\lambda_1 = 5$ bekommen wir das lineare Gleichungssystem

$$-6x = 0, \quad -2x - 6y = 0, \quad -3z + 3w = 0 \quad \text{und} \quad 3w - 3z = 0\,;$$

offensichtlich muß $x = y = 0$ und $z = w$ sein. Basis des Eigenraums ist beispielsweise der Vektor $\vec{b}_1$ mit $x = y = 0$ und $z = w = 1$.

Für $\lambda_2 = -1$ erhalten wir nur die beiden Gleichungen $-2x = 0$ und $3z+3w = 0$. Somit muß x verschwinden, y ist beliebig und $w = -z$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_2 = -1$ ist damit nur zwei. Um Basisvektoren $\vec{b}_2, \vec{b}_3$ des Lösungsraums zu bekommen, setzen wir einmal $x = z = w = 0$ und $y = 1$, dann $x = y = 0$ und $z = 1$. Zusammen mit dem Eigenvektor $\vec{b}_1$ zum Eigenwert fünf haben damit die drei Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Lösung: *Nein;* die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_2 = -1$ ist kleiner als die algebraische.

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

Lösung: Um eine Basis des $\mathbb{R}^4$ zu finden, bezüglich derer die Matrix Dreiecksgestalt hat, brauchen wir zunächst noch einen Hauptvektor zweiter Stufe zu $\lambda_2 = -1$. Da

$$(A + E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{pmatrix}$$

ist, sind die erste und die zweite Komponente beliebig; die dritte und die vierte müssen entgegengesetzt gleich sein. Der einfachste von $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ linear unabhängige Vektor mit dieser Eigenschaft ist offensichtlich der erste Einheitsvektor $\vec{b}_4 = {}^t(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$.

Damit hat A also bezüglich der Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ Dreiecksgestalt. Um diese Dreiecksgestalt zu bestimmen, müssen wir noch nachrechnen, wohin der Hauptvektor zweiter Stufe $\vec{b}_4$ abgebildet wird. $\vec{b}_4$ ist der erste Standardbasisvektors des $\mathbb{R}^4$; somit ist $A\vec{b}_4$ einfach der erste Spaltenvektor von A, d.h. $A\vec{b}_4 = -\vec{b}_4 - 2\vec{b}_2$. Die gesuchte Dreiecksgestalt ist daher

$$\Delta = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

d) Läßt sich auch eine Orthonormalbasis finden, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat?

Lösung: Die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ und $\vec{b}_4$ sind bereits orthogonal zueinander; normiert man sie auf Länge eins, erhält man so eine Orthonormalbasis. Da $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_3$ die Länge $\sqrt{2}$ haben, während $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_4$ bereits Einheitsvektoren sind, bilden die Vektoren $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}_1, \vec{b}_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}_3$ und $\vec{b}_4$ eine Orthonormalbasis aus Hauptvektoren.

e) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}!
Hinweis: Die Inversion von B wird einfacher, wenn Sie sich überlegen, wie sich die Einträge von ${}^tBB$ durch die Spaltenvektoren von B ausdrücken lassen.

Lösung: Wir schreiben

$$\Delta = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

offensichtlich ist N^2 die Nullmatrix. Da nach der allgemeinen Theorie (und wie man auch trivialerweise sieht) $DN = ND$ ist, folgt $e^{\Delta t} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt}(E + Nt)$

$$= \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & -2te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $e^{At} = Be^{\Delta t}B^{-1}$; wir brauchen also B^{-1}. Diese Matrix kann man entweder mit dem GAUSS-Algorithmus bestimmen (was angesichts der vielen Nullen in B recht schnell geht), oder man erinnert sich daran, daß der ij-Eintrag der Matrix ${}^tBB$ das Skalarprodukt des i-ten mit dem j-ten Spaltenvektor von B ist. Da die Spalten von B hier eine Orthogonalbasis bilden, ist ${}^tBB$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen gleich den Längenquadraten der Spaltenvektoren. Um die Einheitsmatrix zu bekommen, müssen wir also nur die Zeilenvektoren von ${}^tB$ durch ihre Längenquadrate teilen, d.h.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das elementare, aber unangenehme Ausmultiplizieren ergibt schließlich

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ -2te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{5t} - e^{-t}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(e^{5t} - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

f) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$!

Falls Sie e) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 \\ 2te^{-3t} & e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(e^{t} + e^{-3t}) & \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-3t}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(e^{t} - e^{-3t}) & \frac{1}{4}(e^{t} + e^{-3t}) \end{pmatrix}$$ *arbeiten.*

Lösung: Nach der allgemeinen Theorie ist (mit der richtigen Matrix e^{At}) $\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}(0)$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ -2te^{-t} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{5t} - e^{-t}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(e^{5t} - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{5t} + e^{-t}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t}(2t + 1) \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}.$$

g) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

Lösung: Da sowohl e^{-t} als auch $(2t + 1)e^{-t}$ gegen Null gehen, konvergieren alle Komponenten des Lösungsvektor gegen Null.

h) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingung?

Lösung: Nein; stört man die dritte und/oder die vierte Komponenten so, daß die beiden nicht mehr entgegengesetzt gleich sind, kommen Terme mit e^{5t} ins Spiel, die dafür sorgen, daß diese beiden Komponenten gegen $\pm\infty$ gehen.

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 2y(t) = 60 \sin 2t\,!$$

Hinweis: $x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x^2 + 1)(x + 2)$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung $y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 2y(t) = 0$ hat das charakteristische Polynom $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2$, was nach dem Hinweis gleich $(\lambda^2 + 1)(\lambda + 2)$ ist. Die Nullstellen sind somit $\pm i$ und -2, die allgemeine Lösung also

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{-2t} \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist eine reine Schwingung mit Kreisfrequenz zwei; man kann also hoffen, daß es auch eine spezielle Lösung dieser Bauart gibt. Um sie zu finden, machen wir einen Ansatz der Form $y(t) = a \cos 2t + b \sin 2t$. Dann ist

$$\dot{y}(t) = -2a \sin 2t + 2b \cos 2t, \quad \ddot{y}(t) - 4a \cos 2t - 4b \sin 2t \quad \text{und} \quad y^{(3)}(t) = 8a \sin 2t - 8b \cos 2t\,.$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung ergibt

$$(-8b - 8a + 2b + 2a) \cos 2t + (8a - 8b - 2a + 2b) \sin 2t = 60 \sin 2t\,;$$

a und b erfüllen also das lineare Gleichungssystem

$$-6(a + b) = 0 \quad \text{und} \quad 6(a - b) = 60 \quad \Longrightarrow \quad a = 5 \quad \text{und} \quad b = -5\,.$$

Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist somit

$$y(t) = 5(\cos 2t - \sin 2t) + C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^{-2t} \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Berechnen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)\big(M - x(t)\big) - \beta x(t)y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t)\big(N - y(t)\big) + \delta x(t)y(t)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, M, N > 0$ und $\alpha\gamma \neq \beta\delta$!
(Das ist die logistische Raubtier-Beutetier-Gleichung.)

Lösung: Für eine Gleichgewichtslösung sind $x(t)$ und $y(t)$ konstant, haben also die Ableitung null; somit muß gelten

$$\alpha x(M - x) - \beta xy = -\gamma y(N - y) + \delta xy = 0 \quad \text{oder} \quad x(\alpha M - \alpha x - \beta y) = y(-\gamma N + \gamma y + \delta x)\,.$$

Eine offensichtliche Lösung ist $x = y = 0$. Ist $x = 0$, aber $y \neq 0$, muß nach der zweiten Gleichung $y = N$ sein, d.h. auch $(0, N)$ ist ein Fixpunkt. Genauso folgt aus $y = 0, x \neq 0$, daß $x = M$ sein muß, d.h. $(M, 0)$ ist ein Fixpunkt. Ein Gleichgewichtspunkt, in dem weder x noch y verschwindet, erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$\alpha x + \beta y = \alpha M \quad \text{und} \quad \delta x + \gamma y = \gamma N\,.$$

Subtrahiert man $\frac{\gamma}{\beta}$-mal oder $\frac{\delta}{\alpha}$-mal die erste Gleichung von der zweiten, erhält man die beiden Gleichungen

$$(\delta - \frac{\alpha\gamma}{\beta})x = \gamma N - \frac{\alpha\gamma}{\beta}M \quad \text{und} \quad (\gamma - \frac{\beta\delta}{\alpha})y = \gamma N - \delta M\,.$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit β sowie der zweiten mit α bringt das in die übersichtlichere Form

$$(\beta\delta - \alpha\gamma)x = \beta\gamma N - \alpha\gamma M \quad \text{und} \quad (\alpha\gamma - \beta\delta)y = \alpha\gamma N - \alpha\delta M\,.$$

Da $\alpha\gamma \neq \beta\delta$ vorausgesetzt war, können wir dividieren und erhalten für den letzten Fixpunkt

$$x = \frac{\beta\gamma N - \alpha\gamma M}{\beta\delta - \alpha\gamma} \quad \text{und} \quad y = \frac{\alpha\delta M - \alpha\gamma N}{\beta\delta - \alpha\gamma}\,.$$

Aufgabe 7: *(3 Punkte)*
Bestimmen Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ und den Anfangsgliedern $x_0 = 0, x_1 = 1$!

Lösung: Die charakteristische Gleichung von $x_n - 5x_{n-1} + 6x_n = 0$ ist $\lambda^2 - 5\lambda + 6$; sie hat die Nullstellen $\lambda = 2$ und $\lambda = 3$. Somit läßt sich jede Lösung in der Form $x_n = a\cdot 2^n + b\cdot 3^n$ schreiben. Dabei ist

$$x_0 = a + b = 0 \quad \text{und} \quad x_1 = 2a + 3b = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = -1 \quad \text{und} \quad b = 1\,.$$

Somit ist $x_n = 3^n - 2^n$.