Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

9. Dezember 2006

Scheinklausur Höhere Mathematik II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *je zwei Punkte*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine komplexe Zahl z mit $z^2 = -6i$!

2) *Richtig oder falsch:* $f(z) = \Re z$ ist eine holomorphe Funktion.

3) *Richtig oder falsch:* Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ ist diagonalisierbar.

4) Welchen Bedingungen müssen $a, b \in \mathbb{C}$ genügen, damit die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -i \\ b & -1 \end{pmatrix}$ symmetrisch *bzw.* Hermitesch ist?

5) *Richtig oder falsch:* Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\det e^A \neq 0$

6) Welche Nullstellen hat das Polynom $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$?

7) *Richtig oder falsch:* Das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = \ln\bigl(1 + y(t)^2\bigr)$ mit $y(0) = 0$ hat genau eine Lösung.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$! *b)* Was ist $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx$?

Aufgabe 2: (*10 Punkte*)

Sei $f(t) = \sin t$ für $-\frac{\pi}{2} < t \leq \frac{\pi}{2}$, periodisch fortgesetzt mit Periode π.

a) Skizzieren Sie die Funktion f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Ist f gerade, ungerade oder keines von beidem?

c) Berechnen Sie die reelle Fourier-Reihe von f !

d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert diese gegen $f(t)$? Wohin konvergiert sie sonst?

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ tritt das Gibbs-Phänomen auf?

f) Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten von f !

g) Welche Aussage liefert der Satz von Parseval für die Funktion f ?

Aufgabe 3: (*3 Punkte*)

Berechnen Sie die Ableitung im Distributionensinn der Funktion $f(t) = [2\,|\sin t|]$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet!

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq |t| \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für zwei feste reelle Zahlen a, b mit $0 \leq a < b$!

b) $g(t)$ sei die Faltung von $f(t)$ mit dem Rechteckimpuls $R(t)$, der auf $[-c, c]$ den Wert eins annimmt und sonst überall verschwindet. Bestimmen Sie $\widehat{g}(\omega)$!

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 5: (*12 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

c) Bezüglich welcher Basis hat A welche Dreiecksgestalt Δ?

d) Läßt sich auch eine Orthonormalbasis finden, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat?

e) Berechnen Sie die Matrizen $e^{\Delta t}$ und e^{At}!
Hinweis: Die Inversion von B wird einfacher, wenn Sie sich überlegen, wie sich die Einträge von ${}^t\!BB$ durch die Spaltenvektoren von B ausdrücken lassen.

f) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$!

Falls Sie e) nicht gelöst haben, können Sie hier mit der (falschen) „Ersatzmatrix“

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 & 0 \\ 2te^{-3t} & e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(e^t + e^{-3t}) & \frac{1}{2}(e^t - e^{-3t}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(e^t - e^{-3t}) & \frac{1}{4}(e^t + e^{-3t}) \end{pmatrix}$$ *arbeiten.*

g) Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

h) Ist dieses Verhalten stabil gegenüber kleinen Veränderungen der Anfangsbedingung?

Aufgabe 6: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 2y(t) = 60 \sin 2t\,!$$

Hinweis: $x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x^2 + 1)(x + 2)$

b) Berechnen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)\big(M - x(t)\big) - \beta x(t)y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t)\big(N - y(t)\big) + \delta x(t)y(t)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, M, N > 0$ und $\alpha\gamma \neq \beta\delta$!
(Das ist die logistische Raubtier-Beutetier-Gleichung.)

Aufgabe 7: (*3 Punkte*)

Bestimmen Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ und den Anfangsgliedern $x_0 = 0, x_1 = 1$!

Formelanhang

$$\int \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) + C$$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 9. Dezember 2006, um 13^{00} Uhr