Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, Zimmer C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 11. Dezember 2006

a) Zur Bestimmung des wahren Werts einer physikalischen Meßgröße werde diese fünfzigmal gemessen; die entsprechende Meßreihe habe einen Mittelwert von 3,145 und eine Standardabweichung von 0,07. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der wahre Wert zwischen 3,14 und 3,145?

Lösung: $\frac{3{,}14-3{,}145}{0{,}07} \approx -0{,}0714$; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also ungefähr

$$F(0) - F(-0{,}0714) = \frac{1}{2} - \big(1 - F(0{,}0714)\big) = F(0{,}0714) - \frac{1}{2} \approx 0{,}0285\,.$$

b) Bestimmen Sie ein Intervall, in dem der wahre Wert mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit liegt!

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wert um höchstens z Standardabweichungen vom Mittelwert entfernt liegt, ist $F(z) - F(-z) = 2F(z) - 1$. Anhand einer Tabelle für F oder durch Rechnung läßt sich näherungasweise der Wert $z \approx 2{,}5758$ bestimmen, für den dies gleich 0,99 wird. Das gesuchte Intervall ist also ungefähr

$$[3{,}145 - 2{,}5758 \cdot 0{,}07,\ \ 3{,}145 + 2{,}5758 \cdot 0{,}07] = [2{,}965,\ 3{,}325]\,.$$

c) Die Zufallsvariable X habe Mittelwert $\overline{x}$ und Standardabweichung σ. Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen $U = 2X + 1$!

Lösung: Der Mittelwert ist natürliche einfach $\overline{u} = 2\overline{x} + 1$; für jedes $u = 2x + 1 \in \mathbb{R}$ ist daher $(u - \overline{u})^2 = 4(x - \overline{x})^2$. Die Standardabweichung von U ist somit gleich 2σ.

d) *Richtig oder falsch:* Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x, so ist X^2 eine Zufallsvariable mit Erwartungswert x^2.

Lösung: *Falsch;* einfachstes Gegenbeispiel ist eine Zufallsvariable zur Standardnormalverteilung: Erwartungswert von X ist null, und damit ist der Erwartungswert von X^2 gleich der Varianz von X, also eins.

e) *Richtig oder falsch:* Schreiben Tausend Studenten eine Klausur, sind die dort erreichten Punktezahlen annähernd normalverteilt.

Lösung: *Im allgemeinen falsch:* Bei einer Klausur, die sehr gut oder sehr schlecht ausfällt, wird man eine deutliche Schiefe der Verteilung erwarten.

f) *Richtig oder falsch:* Der jährliche Abitursdurchschnitt im Fach Mathematik in Baden-Württemberg ist, als Funktion des Jahres, ungefähr normalverteilt.

Lösung: *Richtig* nach dem zentralen Grenzwertsatz: Der Abitursdurchschnitt eines Jahres ist Mittelwert unabhängiger Zufallsvariablen, nämlich der Noten der einzelnen Schüler.

Zwischen 1911 und 1960 wurden jedes Jahr die mittleren Oktobertemperaturen in München gemessen; der Mittelwert der 50 Werte ist 7,974 und die Standardabweichung 1,416. Wir nehmen an, die Meßwerte seien normalverteilt.

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die mittlere Temperatur in einem bestimmten Jahr zwischen sieben und acht Grad liegt?

Lösung: Die Normalisierungen der beiden Werte sind

$$\frac{7-7{,}974}{1{,}416} \approx -0{,}6879 \quad \text{und} \quad \frac{8-7{,}974}{1{,}416} \approx 0{,}0184\,;$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also etwa

$$F(0{,}0184) - F(-0{,}6879) = F(0{,}0184) - 1 + F(0{,}6879) \approx 0{,}2616$$

mit

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt\,.$$

h) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie unter sechs Grad sinkt?

Lösung:

$$F\left(\frac{6-7{,}974}{1{,}416}\right) \approx F(-1{,}394) = 1 - F(1{,}394) \approx 0{,}0816$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sie auf über zehn Grad steigt?

Lösung:

$$1 - F\left(\frac{10-7{,}974}{1{,}416}\right) \approx 1 - F(1{,}431) \approx 0{,}0752$$

i) Wie warm muß es werden, daß man von einem „Jahrhundertherbst“, reden kann, d.h. einen Oktober, der so warm ist, wie es höchstens einmal alle hundert Jahre vorkommt?

Lösung: Der Wert z, für den $F(z) = 0{,}99$ ist, kann mittels Tabelle oder Rechnung näherungsweise bestimmt werden; er liegt bei etwa 2,326. Die gesuchte mittlere Mindestemperatur für einen Jahrhundertherbst liegt also etwa bei

$$7{,}974 + 2{,}326 \cdot 1{,}416 \approx 11{,}27$$

Grad.

j) Durch Digitalisierung von thermischen Rauschen werde eine Folge einer Million Bit erzeugt, deren jedes, unabhängig von den anderen, mit gleicher Wahrscheinlichkeit null oder eins ist. (So etwas ist z.B. gelegentlich in der Kryptographie nützlich.)

k) Wie ist die Anzahl der Nullen unter den erzeugten Bits verteilt?

Lösung: Da die einzelnen Bits durch unabhängige BERNOULLI-Prozesse erzeugt werden, ist die Anzahl der Nullen binomialverteilt mit Parametern $n = 10^6$ und $p = 0{,}5$.

l) Durch welche Normalverteilung läßt sich dies nach dem zentralen Grenzwertsatz approximieren?

Lösung: Durch die Normalverteilung, die denselben Erwartungswert und dieselbe Varianz hat wie die Binomialverteilung aus *a)*. Da jede der 10^6 BERNOULLI-Variablen Erwartungswert $\frac{1}{2}$ und Varianz $\frac{1}{2}(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}) = \frac{1}{4}$ hat, ist der Erwartungswert für die Anzahl der Nullen

500 000, und die Varianz ist 250 000, und genau das sind auch Erwartungswert und Varianz der gesuchten Normalverteilung.

m) Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Anteil der Nullen zwischen 49,9% und 50,1% liegt!

Lösung: In absoluten Zahlen liegt dann die Anzahl der Nullen zwischen 499 000 und 501 000. Wie üblich beim Rechnen mit Normalverteilungen gehen wir über zur normierten Variablen: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine standard-normalverteilte Variable zwischen

$$\frac{499\,000 - 500\,000}{\sqrt{250\,000}} \quad \text{und} \quad \frac{501\,000 - 500\,000}{\sqrt{250\,000}}$$

liegt, also zwischen

$$\pm\frac{1\,000}{\sqrt{250\,000}} = \pm 2$$

liegt. Mit

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

ist die Wahrscheinlichkeit somit gleich

$$F(2) - F(-2) = F(2) - \big(1 - F(2)\big) = 2F(2) - 1 \approx 95{,}45\%$$

n) Bestimmen Sie (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Anteil der Nullen zwischen 49% und 50% liegt!

Lösung: Hier ist die Abweichung vom Mittelwert ± 20 Standardabweichungen; die Wahrscheinlichkeit ist also für alle praktischen Zwecke gleich eins. ($2F(20) - 1 \approx 1 - 0{,}55 \cdot 10^{-88}$, aber diese Genauigkeit ist weit jenseits derer der Approximation der BERNOULI-Verteilung durch eine Normalverteilung.)

Natürlich sollen auch zur Lösung dieser Aufgaben die Zahlen auf der Rückseite des Übungsblatts benutzt werden!