WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 27. November 2006

a) Bestimmen Sie die sämtlichen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen und diskutieren Sie deren Langzeitverhalten!

$\dot y(t) + 2ty(t) = 4t$	(1)	$\dot y(t) + \frac{y(t)}{t} + e^t = 0$	(2)
$\dot y(t) = a + bt + cy(t)$	(3)	$(1+t)\dot y(t) + y(t) + t^2 + t^3 = 0$	(4)
$\dot y(t) + y(t) = 2\sin t$	(5)	$\dot y(t) + \sin t\, y(t) = \sin^3 t$	(6)

Lösung: (1) – (6) sind inhomogene lineare Differentialgleichungen.
Die homogene Gleichung zu (2) ist

$$\dot u(t) + 2tu(t) = 0 \Longrightarrow \ln u(t) = -\int 2t\,dt = -t^2 + C\,,$$

also ist $u(t) = e^{-t^2}$ und

$$y(t) = e^{-t^2}\left(\int -4te^{t^2}\,dt\right) = e^{-t^2}\left(2e^{t^2} + C\right) = 2 + Ce^{-t^2}\,.$$

Die homogene Gleichung zu (2) ist

$$\dot u(t) + \frac{u(t)}{t} = 0 \Longrightarrow \ln u(t) = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t\,,$$

also ist $u(t) = C/t$ mit einer beliebigen Konstanten C. Durch partielle Integration finden wir

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{t}\left(\int -te^{-t}\,dt\right) = -\frac{1}{t}\left(te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right) = -\frac{1}{t}\left(te^{-t} + e^{-t} - C\right) \\ &= -e^{-t} - \frac{e^{-t}}{t} + \frac{C}{t}\,. \end{aligned}$$

Im Falle von (3) ist die homogene Gleichung $\dot u(t) = cu(t)$ mit Lösung $u(t) = Ce^{ct}$; damit ist

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{ct}\left(\int (a+bt)e^{-ct}\,dt\right) = e^{ct}\left(-\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c^2} + \frac{bt}{c}\right)e^{-ct} + C\right) \\ &= Ce^{ct} - \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c^2} + \frac{bt}{c}\right)\,. \end{aligned}$$

Gleichung (4) müssen wir zunächst durch $(1+t)$ dividieren um die übliche Standardform zu erhalten:

$$\dot y(t) + \frac{y(t)}{1+t} = -\frac{t^2+t^3}{1+t} = -t^2\,.$$

Die homogene Gleichung ist dann

$$\dot u(t) + \frac{u(t)}{1+t} = 0 \Longrightarrow u(t) = e^{-\int \frac{dt}{1+t}} = e^{-\ln(1+t) + \widetilde C} = \frac{C}{1+t}\,,$$

und

$$y(t) = -\frac{1}{1+t}\left(\int -t^2(1+t)\,dt\right) = -\frac{t^3/3 + t^4/4}{1+t} + \frac{C}{1+t}\,.$$

Bei Gleichung (5) sehen wir die allgemeine Lösung Ce^{-t} der homogenen Gleichung auch ohne Rechnung. Die Lösung der Differentialgleichung selbst ist

$$y(t) = 2e^{-t}\left(\int \sin t \cdot e^t\,dt\right)\,,$$

wobei wir das Integral durch eine zweifache partielle Integration ausrechnen können. (Es ginge natürlich auch über die EULERschen Formeln.)

$$\int \sin t\, e^t\, dt = -\cos t\, e^t + \int \cos t\, e^t\, dt = -\cos t\, e^t + \sin t\, e^t - \int \sin t\, e^t\, dt\,,$$

also ist

$$2\int \sin t\, e^t\, dt = (\sin t - \cos t)e^t + C \quad \text{und} \quad y(t) = \sin t - \cos t + Ce^{-t}\,.$$

Beim letzten Beispiel schließlich hat die homogene Gleichung $\dot{u}(t) + \sin t\, u(t) = 0$ die Lösung $u(t) = Ce^{\cos t}$ und

$$y(t) = e^{-\cos t}\left(\int \sin^3 t\, e^{\cos t}\, dt\right)\,.$$

Setzen wir $x = \cos t$, ist $dx = -\sin t\, dt$, also

$$\int \sin^3 t\, e^{\cos t}\, dt = -\int \sin^2 t\, e^x\, dx = -\int (1 - x^2)\, e^x\, dx = \int (x^2 - 1)\, e^x\, dx\,,$$

$$= (x^2 - 1)e^x - \int 2xe^x\, dx = (x^2 - 1)e^x - 2xe^x + \int 2e^x\, dx = (x^2 - 2x + 1)e^x + C$$

$$= (\cos^2 t - 2\cos t + 1)e^{\cos t} + C\,.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$y(t) = \cos^2 t - 2\cos t + 1 + Ce^{-\cos t}\,.$$

b) Welche der folgenden Anfangswertprobleme sind eindeutig lösbar?

$$\dot{y}(t) = \cos y(t),\ y(0) = 0 \quad (1) \qquad 2\dot{y}(t)y(t) = 1,\quad y(0) = 0 \quad (2)$$

$$\dot{y}(t) = \tfrac{5}{3}y(t)^{\frac{2}{5}},\ y(0) = 0 \quad (3) \qquad \dot{y}(t) = \frac{\sin t \cdot \cos y(t)}{1 + t^8},\ y(0) = 1 \quad (4)$$

$$\dot{y}(t)^2 = 4y(t),\quad y(0) = 0 \quad (5) \qquad \dot{y}(t) = \frac{1}{y(t)},\quad y(0) = 1 \quad (6)$$

Lösung: Die rechte Seite $\cos y(t)$ von (1) hängt nur von y ab, und die Ableitung $-\sin y$ von $\cos y$ nach y ist überall vom Betrag höchstens eins. Damit haben wir eine LIPSCHITZ-Bedingung (mit LIPSCHITZ-Konstante eins), und die Behauptung folgt aus dem Satz von PICARD-LINDELÖF.
Bei (2) sind $y(t) = \pm\sqrt{t}$ zwei Lösungen – zumindest wenn man für $t = 0$ damit zufrieden ist, daß $\lim_{t\to 0} 2\dot{y}(t)y(t) = 1$ ist. Eine Lösung mit für $t \to 0$ beschränkter Ableitung kann es natürlich nicht geben, denn für diese wäre $\dot{y}(0) \cdot y(0) = 0$.
Bei (3) gibt sind sämtliche Funktionen $y(t) = Ct^{5/3}$ Lösungen des Anfangswertproblems.
Bei (4) ist die partielle Ableitung $\dfrac{-\sin t \cdot \sin y}{1 + t^8}$ der rechten Seite nach y beschränkt, so daß wir den Satz von PICARD-LINDELÖF anwenden können; das Anfangswertproblem ist also eindeutig lösbar.
Bei (5) dagegen sind $y(t) = t^2$ und $y(t) = 0$ zwei verschiedene Lösungen.
Bei (6) schließlich ist die partielle Ableitung $\dfrac{-1}{y^2}$ beschränkt in der Umgebung eines Punktes t mit $y(t) = 1$, also ist zumindest eine lokal eindeutige Lösung garantiert.

c) Finden Sie die allgemeine reelle Lösung der folgenden Differentialgleichungen, und überlegen Sie sich, wo t liegen muß, damit diese Lösungen existieren:

$$\dot{y}(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} \quad (1) \qquad \dot{y}(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} \quad (2) \qquad \dot{y}(t) = e^{t+y(t)} \quad (3)$$

$$\dot{y}(t) = t^2 y(t)^2 \quad (4) \qquad \dot{y}(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} \quad (5) \qquad \dot{y}(t) = \frac{1 + y(t)^2}{1 + t^2} \quad (6)$$

Hinweis zu (6): $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

Lösung: Bei allen diesen Differentialgleichungen funktioniert die Methode der Trennung der Veränderlichen:

$$\dot y(t) = \frac{t^2}{e^{y(t)}} \iff e^{y(t)}\dot y(t)\,dt = t^2 \iff \int e^y\,dy = \int t^2\,dt \iff e^y = \frac{t^3}{3} + C\,,$$

die allgemeine Lösung von (1) ist also $y = \ln\left(\frac{t^3}{3} + C\right)$, und sie existiert für $t > -\sqrt[3]{3C}$.

$$\dot y(t) = \frac{e^t}{y(t)^2} \iff \int y(t)^2\dot y(t)\,dt = \int e^t\,dt \iff \frac{y(t)^3}{3} = e^t + \widetilde C \iff y(t) = \sqrt[3]{3e^t + C}$$

mit $C = 3\widetilde C$. Da die Kubikwurzel $\mathbb{R}$ bijektiv auf sich selbst abbildet, existieren diese Lösungsfunktionen für alle $t \in \mathbb{R}$.

$$\dot y(t) = e^{t+y(t)} = e^t\cdot e^{y(t)} \iff \int e^{-y(t)}\dot y(t)\,dt = \int e^t\,dt \iff -e^{-y(t)} = e^t + \widetilde C\,.$$

Die Lösungen von (3) sind also die Funktionen $\quad y(t) = -\ln(C - e^t)\quad$; sie existieren für $C \geq 0$ und $t < \ln C$.

$$\dot y(t) = t^2 y(t)^2 \iff \int \frac{\dot y(t)}{y(t)^2} = \int t^2\,dt \iff -\frac{1}{y} = \frac{t^3}{3} + \widetilde C \iff y = \frac{-3}{t^3 + C}\,.$$

Die Lösung existiert nicht im Punkt $t = -\sqrt[3]{C}$ und kann damit auch nicht über diesen Punkt hinaus fortgesetzt werden.

$$\dot y(t) = \frac{t^2}{y(t)^2} \iff \int y(t)^2\dot y(t)\,dt = \int t^2\,dt \iff \frac{y(t)^3}{3} = \frac{t^3}{3} + \widetilde C \iff y(t) = \sqrt[3]{t^3 + C}\,;$$

die Lösung existiert für alle Werte von t.

$$\dot y(t) = \frac{1 + y(t)^2}{1+t^2} \iff \frac{\dot y(t)}{1+y(t)^2} = \frac{1}{1+t^2} \iff \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dt}{1+t^2}$$
$$\iff \arctan y(t) = \arctan t + \widetilde C \iff y(t) = \tan(\arctan t + \widetilde C) = \frac{t + \tan\widetilde C}{1 - t\tan\widetilde C}$$

Mit $C = \tan\widetilde C$ ist also

$$y(t) = \frac{t + C}{1 - Ct}\,.$$

Die Lösung existiert in allen Intervallen, die den Punkt $t = \frac{1}{C}$ nicht enthalten.

d) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils an, wo die Lösungen existieren:

$$\begin{array}{lll}
\dot y(t) = \dfrac{t}{y(t)} & \text{mit}\quad y(0) = 3 \quad \text{und mit}\quad y(0) = -3 & (1)\\
\dot y(t) = \sin^2 t\cdot\cos^2 y(t) & \text{mit}\quad y(0) = \dfrac{\pi}{4} & (2)\\
\dot y(t) = 1 + y(t)^2 & \text{mit}\quad y(0) = 0 \quad \text{und mit}\quad y(0) = 1 & (3)\\
y(t)\,\dot y(t) + \left(1 + y(t)^2\right)\sin t = 0 & \text{mit}\quad y(0) = 1 & (4)
\end{array}$$

Lösung: Hier geht es in allen Fällen um Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen.
Unter der Anfangsbedingung $y(0) = 3$ ist

$$\dot y(t) = \frac{t}{y(t)} \iff y(t)\dot y(t) = t$$

äquivalent zu

$$\int_3^y \eta\, d\eta = \int_0^t \tau\, d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} - \frac{9}{2} = \frac{t^2}{2}\,.$$

Multiplikation mit zwei und Auflösen nach y macht daraus $y = \sqrt{9+t^2}$, denn wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 3$ kommt für die Wurzel nur das positive Vorzeichen in Frage. Ist dagegen $y(0) = -3$, so müssen wir zwar links ab -3 integrieren, bekommen aber für y^2 trotzdem dasselbe Ergebnis, da auch $(-3)^2 = 3^2$ ist. Beim Wurzelziehen aber müssen wir jetzt das negative Vorzeichen nehmen, d.h. $y(t) = -\sqrt{9+t^2}$.

$$\dot y(t) = \sin^2 t \cdot \cos^2 y(t) \iff \frac{\dot y(t)}{\cos^2 y(t)} = \sin^2 t$$

wird unter der Anfangsbedingung $y(0) = \frac{\pi}{4}$ äquivalent zu

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^y \frac{d\eta}{\cos^2\eta} = \int_0^t \sin^2\tau\, d\tau \quad \text{oder} \quad \tan y - \tan\frac{\pi}{4} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t\cos t\,.$$

Da $\pi/4$ im Winkelmaß 45° sind, ist $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, also $y(t) = \arctan\left(1 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin t\cos t\right)$.

$$\dot y(t) = 1 + y(t)^2 \iff \frac{\dot y(t)}{1 + y(t)^2} = 1$$

wird unter der Nebenbedingung $y(0) = a$ zu

$$\int_a^y \frac{d\eta}{1+\eta^2} = \int_0^t d\tau \quad \text{oder} \quad \arctan y - \arctan a = t\,.$$

Da $\arctan 0 = 0$ und $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ist, folgt

$$y(t) = \begin{cases} \tan t & \text{für } y(0) = 0 \\ \tan(t + \frac{\pi}{4}) & \text{für } y(0) = 1 \end{cases}.$$

$$y(t)\dot y(t) + \left(1 + y(t)^2\right)\sin t = 0 \iff \frac{y(t)\dot y(t)}{1 + y(t)^2} = -\sin t$$

wird unter der Nebenbedingung $y(0) = 1$ äquivalent zu

$$\int_1^y \frac{\eta\, d\eta}{1+\eta^2} = -\int_0^t \sin\tau\, d\tau \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}\left((\ln(1+y^2) - \ln 2\right) = \cos t - 1\,.$$

(Beim ersten Integrand ist der zweifache Zähler Ableitung des Nenners.) Damit ist

$$\ln(1 + y(t)^2) = 2\cos t - 2 + \ln 2 \quad \text{und} \quad y(t) = \sqrt{2e^{2\cos t - 2} - 1}\,.$$

e) 1960 wurde anhand der damals vorliegenden Daten (von drei amerikanischen Elektrotechnikern) vorgeschlagen, daß die Weltbevölkerung $N(t)$ zum Zeitpunkt t gemäß dem Gesetz $\dot N(t) = aN(t)^b$ wachsen sollte mit $a > 0$ und $b > 1$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung!

Lösung: Wir schreiben die Gleichung um als $N(t)^{-b}\dot N(t) = a$; durch Integration wird daraus

$$\frac{N(t)^{1-b}}{1-b} = at + C \quad \text{oder} \quad N(t)^{1-b} = (at + C)(1-b)\,.$$

Da $1 - b$ negativ ist, $N(t)$ aber für jede realistische Lösung positiv, muß $at + C$ negativ sein. Schreiben wir $C = -at_0$ mit einer neuen Integrationskonstante t_0, so bekommen wir

$$N(t)^{1-b} = a(b-1)(t_0 - t) \quad \text{und} \quad N(t) = \frac{1}{\left(a(b-1)\right)^{\frac{1}{b-1}}} \cdot \frac{1}{(t_0 - t)^{\frac{1}{b-1}}}\,,$$

wobei der Exponent $\frac{1}{b-1}$ eine positive Zahl ist.

f) Diskutieren Sie das qualitative Verhalten der Lösungsfunktionen!

Lösung: Wesentlich ist natürlich nur der zweite Faktor; der erste ist einfach eine Konstante. Offensichtlich geht die Lösung für $t \to t_0$, also zu einem endlichen Zeitpunkt gegen unendlich; nach diesem Modell wird also die Weltbevölkerung zu einem endlichen Zeitpunkt unendlich groß.

g) Welche Bedingung muß die Integrationskonstante C mindestens erfüllen, falls diese Gleichung für den gegenwärtigen Zeitpunkt ein realistisches Modell sein sollte?

Lösung: Offensichtlich muß $t_0 > 2005{,}1$ sein, denn noch ist die Weltbevölkerung endlich. Viel Zeit bleibt aber nicht mehr: Nach FOERSTER, MORA und AMIOT ist die beste Schätzung für t_0 Freitag, der 13. November 2026, um 13^{13} Uhr; siehe ihre Arbeit *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026* in Science **138**, November 1960, Seite 1291–1295.

h) Finden Sie eine Differentialgleichung mit den Hyperbeln $y^2 - t^2 = C$ als Lösungskurven!

Lösung: Wir suchen eine Differentialgleichung, deren Lösungen sich in der Form

$$F(y,t) = y^2 - t^2 = C$$

schreiben lassen. Da die Ableitung einer Konstanten nach der Zeit verschwindet, müssen wir dazu einfach $F\big(y(t)\big)$ nach t ableiten und auf Null setzen:

$$\frac{d}{dt}F\big(y(t)\big) = \frac{d}{dt}(y(t)^2 - t^2) = 2y(t)\dot{y}(t) - 2t = 0 \quad \text{oder} \quad y(t)\dot{y}(t) - t = 0\,.$$

i) *Ditto* für die Lemniskaten $(y^2 + t^2)^2 = 2C^2(t^2 - y^2)$! *(Hier kann man viel kürzen!)*

Lösung: Um dies auf die Form $F(y,t) =$ Konstante zu bringen, müssen wir durch $t^2 - y^2$ dividieren und erhalten

$$F(y,t) = \frac{(y^2 + t^2)^2}{t^2 - y^2} = 2C^2\,.$$

Diese Funktion leiten wir besser nicht als ganzes ab, sondern berechnen die partiellen Ableitungen nach y und t jeweils für sich; sobald wir diese kennen, haben wir auch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}F(y(t), y)\dot{y}(t) + \frac{\partial}{\partial t} = 0\,.$$

Hier ist

$$\frac{\partial}{\partial y}(y,t) = \frac{4(t^2 - y^2)(y^2 + t^2)y + 2y(y^2 + t^2)^2}{(t^2 - y^2)^2} = \frac{2y(y^2 + t^2)(3t^2 - y^2)}{(y^2 - t^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}(y,t) = \frac{4t(t^2 - y^2)(y^2 + t^2) - 2t(y^2 + t^2)^2}{(t^2 - y^2)^2} = \frac{2t(y^2 + t^2)(t^2 - 3y^2)}{(y^2 - t^2)^2}\,,$$

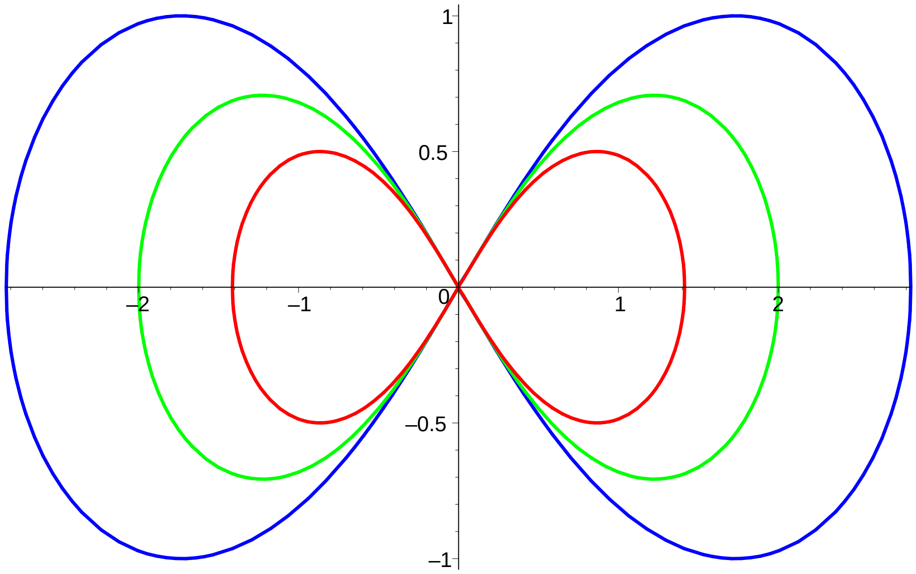
wir haben also die Differentialgleichung

$$\frac{2y(t)\big(y(t)^2 + t^2\big)\big(3t^2 - y(t)^2\big)}{\big(y(t)^2 - t^2\big)^2}\dot{y}(t) = \frac{2t\big(y(t)^2 + t^2\big)\big(t^2 - 3y(t)^2\big)}{\big(y(t)^2 - t^2\big)^2}\,,$$

die erheblich schöner aussieht, wenn wir sie noch mit $\frac{\left(t^2 - y(t)^2\right)^2}{2\left(t^2 + y(t)^2\right.}\big)$ multiplizieren zu

$$y(t)\big((3t^2 - y(t)^2)\big)\dot{y}(t) + t\big(t^2 - 3y(t)^2\big) = 0\,.$$

Die Lösungskurven für $C = 1$ *(innere Kurve)*, $C = \sqrt{2}$ und $C = 2$ *(äußere Kurve)* sind in der folgenden Zeichnung zu sehen:



j) Hat diese Differentialgleichung auch noch weitere Lösungskurven?

Lösung: Ja, natürlich: Die Kurven, bei denen C^2 durch einen negativen Wert ersetzt wird, sind auch Lösungen, wenn auch keine sehr verschiedenen: Sie entstehen aus den angegebenen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

k) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen wenn möglich explizit, und diskutieren Sie ansonsten, wo die implizite Lösung eindeutig nach y aufgelöst werden kann!

$t\dot y(t) + y(t) = 0$	(1)	$(1+t^2)\dot y(t) + 2ty(t) = 0$	(2)
$t\dot y(t) + y(t) + e^t = 0$	(3)	$\big((te^{y(t)} + 2y(t)\big)\dot y(t) + e^{y(t)} = 0$	(4)
$8ty(t)\sin\big(4y(t)^2\big)\dot y(t) = \cos\big(4y(t)^2\big)$	(5)	$\big(t\cos y(t)\big) + \sin y(t) = 0$	(6)
$y(t)\sqrt{1-t^2}\,\dot y(t) = t$	(7)	$\big(ty(t) - t\big)\dot y(t) + t = 0$	(8)
$\big(3t + 3 - y(t)\big)\dot y(t) + y = 0$	(9)	$\big(y(t)^2 - t^2\big)\dot y(t) + 2ty(t) = 0$	(10)

Lösung: Wir wählen a, b jeweils so, daß $a\big(y(t), t\big)\dot y(t) + b\big(y(t), t\big) = 0$ die gegebene Gleichung ist. Für (1) ist also $a(y,t) = t$ und $b(y,t) = y$, also $a_t = b_y = 1$, so daß die Gleichung exakt ist. Wir suchen eine Funktion $F(y,t)$ mit $F_y = a$ und $F_t = b$; das ist hier offensichtlich $F(y,t) = yt$. Die Lösungskurven von (1) sind also die Kreise $y(t)^2 + t^2 = r^2$. (Negative Konstanten führen hier offensichtlich zu keiner Lösung.) Die Kreisgleichung kann bekanntlich überall dort eindeutig nach $y(t)$ aufgelöst werden, wo y nicht verschwindet.
Bei (2) ist $a(y,t) = 1 + t^2$ und $b(y,t) = 2ty$, also $y_t = 2t = b_y$, so daß auch diese Gleichung exakt ist. Integration ergibt $F(y,t) = (1+t^2)y$, wir haben also die Lösungskurven $y(t) = \dfrac{C}{1+t^2}$.
Bei (3) ist $a(y,t) = t$ und $b(y,t) = y + e^t$, also $a_t = 1 = b_y$; auch (3) ist also exakt. Hier ist $F(y,t) = ty + e^t$, also haben wir die Lösungen $y(t) = \dfrac{C - e^t}{t}$.
Auch für (4) mit $a(y,t) = te^y + 2y$ und $b(y,t) = e^y$ ist die Exaktheitsbedingung $a_t = b_y$ erfüllt; wir erhalten $F(y,t) = te^y + y^2$, haben also die Lösungskurven $te^{y(t)} + y(t)^2 = C$, wobei C offensichtlich nicht negativ sein kann. Eindeutige Auflösbarkeit liegt nach dem Satz über implizite Funktionen überall dort vor, wo $F_y(y,t) = a(y,t) = te^y + 2y$ nicht verschwindet.
Bei (5) ist $a(y,t) = 8ty\sin 4y^2$ und $b(y,t) = -\cos 4y^2$, also $a_t = 8y\sin 4y^2 = b_y$. Integration von b über die darin nicht vorkommende Variable t ergibt $F(y,t) = -t\cos 4y^2 + g(y)$; leiten wir dies ab nach y, sehen wir, daß wir bereits mit $g(y) \equiv 0$ die Funktion a erhalten. Also sind die Lösungskürven gegeben durch $t\cos 4y(t)^2 = C$, was für $t = 0$ zu nichts führt, und für $t \neq 0$ zu $y(t) = \dfrac{1}{4}\sqrt{\arccos\dfrac{C}{t}}$.

Bei (6) ist $a(y,t) = t\cos y$ und $b(y,t) = \sin y$. Offensichtlich ist $a_t = b_y$, und wir können $F(y,t) = t\sin y$ setzen. Die Lösungskurven sind also $t\sin y(t) = C$, was wieder für $t \neq 0$ aufgelöst werden kann zu $y(t) = \arcsin \frac{C}{t}$ Bei (7) ist $a(y,t) = y\sqrt{1-t^2}$ und $b(y,t) = -t$; offensichtlich ist $b_y = 0$ von a_t verschieden; die Differentialgleichung ist also nicht exakt. Die Funktion

$$\frac{b_y - a_t}{a} = -\frac{\frac{yt}{\sqrt{1-t^2}}}{y\sqrt{1-t^2}} = \frac{-t}{1-t^2}$$

allerdings hängt nur von t ab, also führt ihre Stammfunktion $-\ln\sqrt{1-t^2}$ zum integrierenden Faktor

$$e^{-\ln\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Multiplizieren wir die Gleichung damit, erhalten wir

$$y(t)\dot{y}(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,,$$

was wir wahlweise als Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen oder als exakte Differentialgleichung lösen können. In beiden Fällen ist die Hauptschwierigkeit die Berechnung von

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2}\,.$$

Wie meist bei Ausdrücken wie $\sqrt{1-t^2}$ bietet sich hier eine Substitution der Form $t = \sin u$ und damit $dt = \cos u\,du$ an, denn dann ist $\sqrt{1-t^2} = \cos u$ und

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{\sin u}{\cos u}\cos u\,du = \int \sin u\,du = -\cos u = -\sqrt{1-\sin^2 u} = -\sqrt{1-t^2}\,.$$

Die Lösungskurven der Differentialgleichung haben somit die Form

$$\frac{y^2}{2} = C - \sqrt{1-t^2} \quad \text{oder} \quad y(t) = \pm\sqrt{C - 2\sqrt{1-t^2}}\,,$$

wobei das Vorzeichen in allen Punkten mit $y \neq 0$ eindeutig bestimmt ist.
Auch bei (8) mit $a(y,t) = ty - t$ und $b(y,t) = t$ ist $a_t \neq b_y$, aber

$$\frac{b_y - a_t}{a} = \frac{1-y}{ty-t} = -\frac{1}{t}$$

hängt nur von t ab, es gibt also einen integrierenden Faktor

$$e^{-\int \frac{dt}{t}} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t}\,.$$

Die damit multiplizierte Gleichung ist $\big(y(t)-1\big)\dot{y}(t) + 1 = 0$; da t hierin nicht explizit vorkommt, sehen wir sofort die Lösung $\frac{1}{2}y(t)^2 - y(t) + t = C$. Quadratische Ergänzung macht daraus

$$\big(y(t)-1\big)^2 + 2t = 2C + 1 \underset{\text{def}}{=} \widetilde{C} \quad \text{oder} \quad y(t) = 1 \pm \sqrt{\widetilde{C} - 2t}\,.$$

Bei (9) ist $a = 3t + 3 - y$ und $b = y$, also $a_t = 3 \neq 1 = b_y$.

$$\frac{b_y - a_t}{a} = \frac{1-3}{3t+3-y}$$

hängt offensichtlich sowohl von t als auch von y ab, es gibt also keinen integrierenden Faktor der Form $\varphi(t)$. Dafür hängt

$$\frac{a_t - b_y}{b} = \frac{3-1}{y} = \frac{2}{y}$$

nur von y ab,

$$\psi(y) = e^{\int \frac{2\,dy}{y}} = e^{2\ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

ist also ein integrierender Faktor. Nach Multiplikation damit wird die Gleichung zu

$$\big(3t+3-y(t)\big)y(t)^2\dot{y}(t)+y(t)^3=0\,.$$

Eine Funktion $F(y,t)$ mit $F_y = (3t+3-y)y^2 = -y^3+3(t+1)y^2$ und $F_t = y^3$ ist offensichtlich $F(y,t) = -\frac{y^4}{4}+(t+1)y^3$; die gesuchten Lösungskurven haben also die Gleichungen $(t+1-y)y^3 = C$. Sie sind dort eindeutig nach y auflösbar, wo die partielle Ableitung $F_y = (3t+3-y)y^2$ nicht verschwindet, d.h. wo $y \neq 0$ und $y \neq 3t+3$ ist.

Bei (10) schließlich ist $a(y,t) = y^2-t^2$ und $b(y,t) = 2ty$, also $a_t = -2t \neq 2t = b_y$. Wie in (9) hängt

$$\frac{a_t-b_y}{b} = \frac{-2t-2t}{2ty} = -\frac{2}{y}$$

nur von y ab, wir haben also den integrierenden Faktor

$$e^{-\int\frac{2\,dy}{y}} = e^{-2\ln y} = e^{-\ln y^2} = \frac{1}{y^2}\,.$$

Damit multipliziert wird die Gleichung zur exakten Differentialgleichung

$$\left(1-\frac{t^2}{y^2}\right)\dot{y}(t)+\frac{2t}{y(t)} = 0\,,$$

und dazu findet wir leicht die Stammfunktion $F(y,t) = y+\frac{t^2}{y}$. Die Lösungskurven haben also die Gleichungen

$$y+\frac{t^2}{y} = C \quad \text{oder} \quad y^2-Cy+t^2 = (y-\tfrac{1}{2}C)^2 = \tfrac{1}{4}C^2 \quad \text{d.h.} \quad y(t) = \frac{C\pm\sqrt{C^2-4t}}{2}\,.$$

Probleme mit der eindeutigen Lösbarkeit gibt es, wenn die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ das Vorzeichen der Wurzel nicht eindeutig festlegt, wenn also C^2-4t_0 verschwindet. Dann ist $y(t_0) = \frac{1}{2}C$, d.h. Anfangsbedingungen der Form $y(t_0) = \pm\sqrt{t_0}$ führen zu nichteindeutigen Lösungen.